Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.
   B) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
   C) A, B e C sono matrici ortogonali.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) se un insieme di 5 polinomi di $I\!R^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $I\!R^4[t]$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^2 \to I\!R$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(I\!R)$ ad $I\!R$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   C) se $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.
   D) se $A, B \in M_n(I\!R)$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   C) se l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ contiene un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo.
   D) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.
   B) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   B) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.
   D) se $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.
   B) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   C) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
   D) A e B hanno lo stesso rango.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,0,0)$,$(0,0,1)$,$(1,1,0)$,$(1,1,1)$ è $1/6$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(1,3,2)$ è il punto $(4,5,3)$.
   D) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v \rangle = 0$.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   C) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$.
   D) non esistono matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.
   C) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) $(A - B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   B) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.
   B) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in I\!R^4 : (x, y, z, t) \neq (1, 1, 1, 1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^4$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.
   B) se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in I\!R$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.
   B) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.
   C) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
   D) A, B e C sono matrici ortogonali.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.
   B) se l'insieme delle soluzioni di **S** contiene un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora **S** è un sistema lineare omogeneo.
   C) se **S** ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   D) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.
   C) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.
   D) se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 5 polinomi di $\mathbb{R}^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4[t]$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v\rangle = 0$.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.

2) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.
   B) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.
   C) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso rango.
   B) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
   C) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   D) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v\rangle = \langle v, w\rangle = \langle w, u\rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.
   C) se $v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|\lambda v\| = \lambda\|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v\rangle \geq 0$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in I\!R^4 : (x, y, z, t) \neq (1, 1, 1, 1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^4$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) $(A - B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.
   B) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono matrici $A, B \in M_n(I\!R)$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
   B) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $I\!R^n$.
   C) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) $(A-B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.
   D) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z,t) \neq (1,1,1,1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x,y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se **S** ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   B) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.
   C) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.
   D) se l'insieme delle soluzioni di **S** contiene un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora **S** è un sistema lineare omogeneo.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.
   C) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.
   D) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
   B) se $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   C) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in I\!R$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   B) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.
   C) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
   D) A e B hanno lo stesso rango.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
   B) A, B e C sono matrici ortogonali.
   C) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   B) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v\rangle = 0$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.
   C) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $I\!R^n$.
   D) non esistono matrici $A, B \in M_n(I\!R)$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) se un insieme di 5 polinomi di $I\!R^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $I\!R^4[t]$.

9) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.
   C) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.

13 gennaio 2006 01011

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.
   B) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) $(A - B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.
   D) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \neq (1, 1, 1, 1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   B) se l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ contiene un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo.
   C) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.
   D) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v \rangle = 0$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,0,0)$,$(0,0,1)$,$(1,1,0)$,$(1,1,1)$ è $1/6$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(1,3,2)$ è il punto $(4,5,3)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.
   C) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.
   D) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.
   C) se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.
   B) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.
   D) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
B) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
C) se un insieme di 5 polinomi di $\mathbb{R}^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4[t]$.
D) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
A) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.
B) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
C) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.
D) A, B e C sono matrici ortogonali.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
A) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.
B) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
C) A e B hanno lo stesso rango.
D) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
A) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.
B) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$.
C) non esistono matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.
B) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
D) se $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) se un insieme di 5 polinomi di $\mathbb{R}^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4[t]$.
   C) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.
   D) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

   B) se l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ contiene un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo.
   C) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.
   C) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.
   D) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.
   D) se $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.
   C) A, B e C sono matrici ortogonali.
   D) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in I\!R$ risulta $\langle\lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle$.
   B) se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$ per ogni $u, v \in V$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.
   D) $(A - B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   C) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \neq (1, 1, 1, 1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   B) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.
   C) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
   D) A e B hanno lo stesso rango.

7) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.
   C) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.
   C) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$.
   D) non esistono matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.
   D) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v\rangle = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.
   B) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.
   C) se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.
   B) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   D) se l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ contiene un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v\rangle = 0$.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   C) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.
   B) A, B e C sono matrici ortogonali.
   C) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
   D) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 5 polinomi di $\mathbb{R}^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4[t]$.
   B) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.
   B) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) $(A - B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   B) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.
   C) A e B hanno lo stesso rango.
   D) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) se $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.
   D) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \neq (1, 1, 1, 1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.
   C) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.
   D) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.
   C) non esistono matrici $A, B \in M_n(I\!R)$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
   D) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $I\!R^n$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \neq (1, 1, 1, 1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ contiene un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo.
   B) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   D) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.
   B) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) $(A - B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.
   C) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.
   D) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.
   B) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) se $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) se $\{v_1, \dots , v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \dots , \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots , \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.
   D) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in I\!R$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) A, B e C sono matrici ortogonali.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.
   C) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
   D) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.
   B) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) se un insieme di 5 polinomi di $\mathbb{R}^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4[t]$.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v\rangle = 0$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.

8) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.
   B) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso rango.
   B) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
   C) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   D) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.
   D) se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.

3) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se **S** ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   B) se l'insieme delle soluzioni di **S** contiene un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora **S** è un sistema lineare omogeneo.
   C) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.
   D) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   B) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v\rangle = 0$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.
   C) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.
   D) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) $(A - B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \neq (1, 1, 1, 1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, dotato delle usuali operazioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso rango.
   B) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   C) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
   D) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 5 polinomi di $I\!R^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $I\!R^4[t]$.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.
   B) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
   C) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.
   D) A, B e C sono matrici ortogonali.

5) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.
   B) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono matrici $A, B \in M_n(I\!R)$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
   B) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   C) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $I\!R^n$.
   D) se $A \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.
   C) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) se un insieme di 5 polinomi di $\mathbb{R}^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4[t]$.
   C) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   D) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) se $v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.
   C) A, B e C sono matrici ortogonali.
   D) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^2 \to I\!R$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(I\!R)$ ad $I\!R$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   D) se $A, B \in M_n(I\!R)$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.
   B) se l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ contiene un sottospazio vettoriale di $I\!R^n$ allora $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   D) ogni sottoinsieme di $I\!R^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.
   C) non esistono matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
   B) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.
   C) A e B hanno lo stesso rango.
   D) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.
   B) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v \rangle = 0$.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \neq (1, 1, 1, 1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, dotato delle usuali operazioni.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) $(A - B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.
   C) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.
   D) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.

8) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.
   C) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.
   D) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   B) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.
   C) se l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ contiene un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo.
   D) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v\rangle = 0$.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in I\!R$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.
   C) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.
   D) se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.
   B) A, B e C sono matrici ortogonali.
   C) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.
   D) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 5 polinomi di $I\!R^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $I\!R^4[t]$.
   B) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) $(A-B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.
   C) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.
   D) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.
   D) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z,t) \neq (1,1,1,1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.
   D) se $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.

5) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.
   B) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.
   B) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso rango.
   B) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
   C) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   D) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   B) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.
   C) se l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ contiene un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo.
   D) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   B) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v\rangle = \langle v, w\rangle = \langle w, u\rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
   B) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.
   C) se $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|\lambda v\| = \lambda\|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v\rangle \geq 0$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.
   B) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) $(A - B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \neq (1, 1, 1, 1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
   B) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.
   C) A, B e C sono matrici ortogonali.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$.
   B) non esistono matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) se un insieme di 5 polinomi di $\mathbb{R}^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4[t]$.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.
   B) se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
   B) A e B hanno lo stesso rango.
   C) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.
   D) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.
   C) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v \rangle = 0$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$ è $1/6$.

9) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.
   C) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.
   D) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V esistono dei numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che l'insieme $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle v - u, u \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) se T è una trasformazione ortogonale allora $\langle u, v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ per ogni $u, v \in V$.
   D) per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\lambda \in I\!R$ risulta $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile allora $\rho(A^{-1}) = \rho({}^tA)$.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_3(I\!R)$ ad $I\!R$ che manda ogni matrice reale 3×3 nella sua traccia ha dimensione 8.
   C) la funzione $F : I\!R^2 \to I\!R$ definita ponendo $F(x, y) = |x| + |y|$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(I\!R)$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ contiene un sottospazio vettoriale di $I\!R^n$ allora $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette soluzioni allora C è una matrice regolare.
   C) $Sol(\mathbf{S})$ è, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, uno spazio vettoriale di dimensione $\rho(A) - n$.
   D) ogni sottoinsieme di $I\!R^n$ è rappresentabile come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0$ è una parabola.
   B) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\langle u \wedge v, u + v \rangle = 0$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 0)$,$(0, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$ è 1/6.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi sono isomorfi e il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   B) le due operazioni definite in un anello sono sempre commutative.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano in 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se A^2 è la matrice identica allora anche A^{100} lo è.
   C) $(A - B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.
   D) se $A = -B$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque positive è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \neq (1, 1, 1, 1)\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle successioni reali convergenti è una base per lo spazio vettoriale reale di tutte le successioni reali, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme di tutte le matrici reali 3×3 triangolari alte o basse è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = t + 1, z = -2t$ e $x + y + z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è n allora T è diagonalizzabile.
   B) se T è diagonalizzabile allora A è simmetrica.
   C) l'intersezione di due autospazi di T relativi ad autovalori distinti contiene solo il vettore nullo.
   D) se A è una matrice simmetrica a traccia nulla e T ammette almeno un autovalore positivo allora ne ammette anche almeno uno negativo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   B) se $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$.
   C) il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale di V di dimensione h ha dimensione $n - h$.
   D) se $u, v, w \in V$ e $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) A, B e C sono matrici ortogonali.
   B) $3A + B - 2C = A - C + B - C + 2A$.
   C) ${}^t(2A \cdot B)$ è una matrice regolare.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$, $B \cdot C = C \cdot B$ e $A \cdot C = C \cdot A$ allora anche la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica ed il suo determinante è uguale a 1.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutte le quaterne ordinate ottenute permutando in tutti i modi possibili i numeri $1, 2, 3, 4$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale reale non finitamente generato, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) se un insieme di 5 polinomi di $\mathbb{R}^4[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) è linearmente indipendente allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4[t]$.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - z = 2$ e $x + y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale.
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Siano $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ due sistemi lineari omogenei a coefficienti reali entrambi di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi) e sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \bigcup \mathbf{S}_2$. Allora
   A) se $2m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se $2m = n$ e la matrice incompleta di $\mathbf{S}$ ha determinante nullo il sistema lineare $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) il sistema lineare $\mathbf{S}$ può non ammettere soluzioni.
   D) se $2m > n$ esiste almeno un'equazione di $\mathbf{S}$ che è combinazione lineare delle rimanenti.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) ogni spazio vettoriale reale n-dimensionale è isomorfo allo spazio vettoriale reale $I\!R^n$.
   B) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + A + A) = 3^n \cdot \det A$.
   D) non esistono matrici $A, B \in M_n(I\!R)$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette autovalori reali allora anche T^3 ammette autovalori reali.
   B) T è suriettivo se e solo se il polinomio caratteristico di T non ammette 0 come radice.
   C) se T non ammette autovalori reali allora anche T^2 non ammette autovalori reali.
   D) A e B hanno lo stesso rango.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(1, 4)$, $(-3, 6)$ è $(-1, 5)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ è $\frac{3}{4}$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$ è $1/2$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'anello dei polinomi a coefficienti reali (con le usuali operazioni di somma e prodotto) non contiene divisori dello zero.
   B) l'insieme di tutti i numeri che si ottengono moltiplicando 5 per un qualunque numero intero relativo è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.