14 gennaio 2013 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.
V F c) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.
V F d) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.
V F b) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.
V F c) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.
V F d) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.
V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.
V F c) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.
V F d) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.
V F b) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.
V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.
V F d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.
V F b) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.
V F c) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.
V F d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F d) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

V F b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

V F d) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F b) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $((1, 1, 2), (3, 1, 0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 1$ e $-x - y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V **F** b) A e C hanno lo stesso rango.

V **F** c) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

V **F** b) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

V **F** c) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V **F** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle = 0$.

V **F** c) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V **F** d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** b) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

V **F** c) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V **F** d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

V F b) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

V F d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F b) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

V F d) Tutti gli anelli sono commutativi.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T sono isomorfismi allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

V F b) La funzione $S + T$ (definita dalla formula $(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i \in \{1, \dots, n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

V F b) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F d) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

V F d) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.
V **F** b) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.
V **F** c) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.
V **F** d) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

2) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.
V **F** b) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.
V **F** c) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.
V **F** d) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.
V **F** b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.
V **F** c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.
V **F** d) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V **F** a) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.
V **F** b) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.
V **F** c) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.
V **F** d) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.
V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.
V **F** c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.
V **F** d) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

V F d) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle = 0$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

V F d) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

V F b) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

V F d) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(0,0,0)$ e la coppia di vettori $((1,1,2),(3,1,0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di equazione $x+y+z=1$ e $-x-y-z=0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

V F d) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i \in \{1, \ldots, n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

V F b) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F c) La funzione $S+T$ (definita dalla formula $(S+T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se S e T sono isomorfismi allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F b) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V F c) A e C hanno lo stesso rango.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\ ^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

V F c) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

V F b) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F b) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F c) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V F c) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.
V F b) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.
V F c) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.
V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.
V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.
V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.
V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
V F b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^\perp\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.
V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.
V F d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.
V F b) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.
V F c) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.
V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.
V F b) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.
V F c) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.
V F d) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

6) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.

V F b) **S** è possibile se e solo se $m = n$.

V F c) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S** allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

V F d) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $((1, 1, 2), (3, 1, 0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

V F c) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F d) I piani di equazione $x + y + z = 1$ e $-x - y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F c) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V **F** a) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

V **F** b) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** c) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

V **F** d) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) A e C hanno lo stesso rango.

V **F** b) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V **F** c) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.

V **F** b) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V **F** c) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** d) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

V **F** b) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

V **F** c) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

V **F** d) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V **F** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle = 0$.

V **F** d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

V F c) Il punto $(0,0,0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F b) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F d) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S + T$ (definita dalla formula $(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se S e T sono isomorfismi allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

V F c) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i \in \{1, \dots, n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

V F c) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F d) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F c) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.

V F d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

4) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V F c) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

V F c) Il punto $(0,0,0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

V F c) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V F d) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle = 0$.

V F d) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T sono isomorfismi allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

V F b) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i \in \{1, \ldots, n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

V F d) La funzione $S + T$ (definita dalla formula $(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

V F c) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

V F d) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x + y + z = 1$ e $-x - y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $((1, 1, 2), (3, 1, 0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V F c) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F c) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

V F d) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F b) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.

V F c) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

V F d) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F d) A e C hanno lo stesso rango.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F b) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

V F b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

V F d) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F b) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

V F c) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $((1, 1, 2), (3, 1, 0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V F b) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 1$ e $-x - y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.

V F d) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V F c) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F d) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

V F c) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

V F d) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

V F b) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

V F c) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

V F d) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.

V F b) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

V F c) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F d) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle = 0$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

V F b) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

V F b) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

V F c) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F c) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

V F d) Tutti gli anelli sono commutativi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

V F d) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) A e C hanno lo stesso rango.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S + T$ (definita dalla formula $(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se S e T sono isomorfismi allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

V F c) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i \in \{1, \dots, n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

V F d) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

14 gennaio 2013 N. di Matricola: 01111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

V F b) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.

V F c) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

V F b) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

V F c) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

4) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F c) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle = 0$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Il punto $(0,0,0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

V F b) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

V F d) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

V F b) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F c) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.

V F d) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

V F b) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

14 gennaio 2013 N. di Matricola: 10000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

V **F** c) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

V **F** d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) A e C hanno lo stesso rango.

V **F** b) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V **F** c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** d) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V **F** a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

V **F** b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

V **F** c) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** d) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

V **F** b) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

V **F** d) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

V **F** b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V **F** d) Tutti gli anelli sono commutativi.

6) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$.

V F b) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{v}\|$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U}=\dim\mathbf{U}$.

V F d) Una trasformazione lineare $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S,T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S+T$ (definita dalla formula $(S+T)(\mathbf{v})=S(\mathbf{v})+T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se S e T sono isomorfismi allora $S\circ T$ è un isomorfismo.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i)=T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i\in\{1,\dots,n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

V F d) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $X=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n=\dim\mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})\leq\dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4,\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Se due vettori $\mathbf{u},\mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u}=\mathbf{v}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,\tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(0,0,0)$ e la coppia di vettori $((1,1,2),(3,1,0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V F b) $\tilde{\mathbf{e}}_1\wedge\tilde{\mathbf{e}}_1=\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

V F d) I piani di equazione $x+y+z=1$ e $-x-y-z=0$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

V F b) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

V F c) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

V F d) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.

3) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V F b) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.

V F d) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

V F b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F c) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x + y + z = 1$ e $-x - y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $((1, 1, 2), (3, 1, 0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V F c) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

V F b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

V F d) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F b) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F c) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ e $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v}\rangle = 0$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

V F d) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

2) Sia $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F b) La trasposta di una matrice invertibile $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

V F c) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.

V F d) La somma di due matrici ortogonali $n\times n$ è una matrice ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

V F b) L'anello $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

V F d) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V F c) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

V F b) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

V F b) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i \in \{1, \dots, n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

V F b) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F c) La funzione $S + T$ (definita dalla formula $(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se S e T sono isomorfismi allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V F c) A e C hanno lo stesso rango.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

V F d) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

V F b) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

3) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V F c) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle = 0$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

V F d) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

V F d) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

V F d) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F b) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

V F d) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F d) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

V F c) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

V F d) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) A e C hanno lo stesso rango.

V F c) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F d) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

V F b) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.

V F c) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i \in \{1, \dots, n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

V F b) La funzione $S + T$ (definita dalla formula $(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F d) Se S e T sono isomorfismi allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

V F c) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

V F c) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

V F b) I piani di equazione $x + y + z = 1$ e $-x - y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $((1, 1, 2), (3, 1, 0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V F d) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $((1, 1, 2), (3, 1, 0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di equazione $x + y + z = 1$ e $-x - y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F b) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

V F c) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.

V F d) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

V F d) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

V **F** b) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

V **F** c) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

V **F** d) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.

V **F** b) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

V **F** c) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V **F** d) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.

V **F** b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

V **F** d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

9) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V **F** b) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V **F** c) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V **F** d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F b) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

V F d) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F d) A e C hanno lo stesso rango.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

V F b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

V F b) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F d) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

V F b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

V F d) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

V F d) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F b) Se S e T sono isomorfismi allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i \in \{1, \dots, n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

V F d) La funzione $S + T$ (definita dalla formula $(S+T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle = 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

V F b) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

2) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F c) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V F d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle = 0$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

V F d) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

5) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.

V **F** b) **S** è possibile se e solo se $m = n$.

V **F** c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S** allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

V **F** d) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V **F** a) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** b) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

V **F** c) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** d) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

V **F** b) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

V **F** c) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

V **F** d) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

V **F** b) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V **F** c) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** d) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

V **F** b) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V **F** d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

V F b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F c) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F d) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

V F b) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F c) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F b) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

V F c) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

V F d) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i \in \{1, \ldots, n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

V F b) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F c) La funzione $S + T$ (definita dalla formula $(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se S e T sono isomorfismi allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V F c) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $((1, 1, 2), (3, 1, 0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V F b) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 1$ e $-x - y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V F c) A e C hanno lo stesso rango.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.
V F b) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.
V F c) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.
V F d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.
V F b) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.
V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.
V F d) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.
V F b) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.
V F c) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.
V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.
V F b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.
V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
V F d) Tutti gli anelli sono commutativi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.
V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.
V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.
V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Il punto $(0,0,0)$ e la coppia di vettori $((1,1,2),(3,1,0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) I piani di equazione $x+y+z=1$ e $-x-y-z=0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

V **F** d) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

V **F** c) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

V **F** d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

V **F** b) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

V **F** d) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

V **F** b) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.

V **F** c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.

V F b) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F c) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F d) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

V F b) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

V F c) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

V F d) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F d) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F c) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

V F d) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

5) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ e $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=0$ allora $\langle 2\mathbf{u},3\mathbf{v}\rangle=0$.

V F c) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

6) Sia $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

V F b) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A\cdot(x)=(b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S})\neq\emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}'-\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $Sol(\mathbf{S})\neq\emptyset$ allora $\rho(A)=\rho(C)$.

V F d) A e C hanno lo stesso rango.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,\tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x=3t, y=2t, z=t$ e $x=t, y=0, z=-3t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il punto $(0,0,0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x-4y-z=0$.

V F c) $(\tilde{\mathbf{e}}_1+\tilde{\mathbf{e}}_2)\wedge(\tilde{\mathbf{e}}_1-\tilde{\mathbf{e}}_2)=-2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S,T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i)=T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i\in\{1,\dots,n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

V F c) Se S e T sono isomorfismi allora $S\circ T$ è un isomorfismo.

V F d) La funzione $S+T$ (definita dalla formula $(S+T)(\mathbf{v})=S(\mathbf{v})+T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se T ha n autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se A è invertibile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Può accadere che T abbia un numero infinito di polinomi caratteristici distinti.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Tutte le basi di $\mathbf{V}$ hanno la stessa cardinalità.

V F c) Una n-upla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $n = \dim \mathbf{V}$.

V F d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$.

3) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile allora il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V F b) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F c) Se T è suriettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T \circ T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ costituiscono un sistema di riferimento per il piano $x - 4y - z = 0$.

V F b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\mathbf{e}}_2) = -2\tilde{\mathbf{e}}_3$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione parametrica.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t, z = t$ e $x = t, y = 0, z = -3t$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F b) Il gruppo $(\tilde{\mathbb{Q}}, +)$ dei numeri reali razionali è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$.

V F c) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dei numeri reali ha caratteristica 0.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici triangolari alte $n \times n$ è una matrice triangolare alta.

V F b) Se in una matrice A si moltiplica una riga per -1 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F c) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora anche $2A$ è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora la sua traccia non può essere nulla.

V F b) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale che abbia tutti gli elementi della diagonale principale nulli è nullo.

V F c) Esistono matrici ortogonali che non sono invertibili.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_2 = 0$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ allora $\langle 2\mathbf{u}, 3\mathbf{v} \rangle = 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base ortonormale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Date tre basi ordinate di $\mathbb{R}^n$, almeno due di esse sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione uguale a $\rho(A)$.

V F c) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V F d) Se $m > n + 1$ allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora tutti gli autovalori di T sono fra loro distinti.

V F b) Se A è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente inferiore a n.

V F d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora anche A^2 è diagonalizzabile per similitudine.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se in una matrice A si scambiano fra loro di posto due righe si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

V F b) Ogni matrice diagonale è anche una matrice triangolare.

V F c) La somma di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) La trasposta di una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a 1 o a -1.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot \det M^i_1$, dove M^i_j rappresenta il minore complementare dell'elemento a^i_j.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F d) Esistono matrici invertibili che ammettono due inverse distinte.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\ ^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine allora coincidono.

V F b) La funzione $S + T$ (definita dalla formula $(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$) è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Se S e T sono isomorfismi allora $S \circ T$ è un isomorfismo.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $S(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i)$ per ogni indice $i \in \{1, \dots, n\}$, allora le funzioni S e T coincidono.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ hanno le stesse componenti rispetto a una fissata base di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

V F b) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è linearmente indipendente.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ non è omogeneo e $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$, allora $Sol(\mathbf{S})$ non è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

V F b) A e C hanno lo stesso rango.

V F c) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 1$ e $-x - y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $((1, 1, 2), (3, 1, 0))$ costituiscono un sistema di riferimento per $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni campo contiene almeno un divisore dello zero.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 è privo di divisori dello zero.

V F c) L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

V F d) L'anello $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è privo di unità moltiplicativa.