28 gennaio 2013 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V **F** b) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

V **F** c) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V **F** d) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** b) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

V **F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V **F** d) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V **F** b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V **F** c) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

V **F** d) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

V **F** b) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

V **F** b) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V **F** c) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V **F** d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

6) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) **S** è possibile se e solo se $m \leq n$.

V F b) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S** allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

V F d) Se **S** non è possibile allora le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

V F d) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\, {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

V F b) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

V F b) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

V F c) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

V F b) Il punto $(0,0,0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.

V F c) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F b) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F c) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F b) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V F d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F b) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

V F d) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

V F b) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

V F b) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

V F c) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

V F d) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

V F b) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F c) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

2) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

V F b) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F c) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ non è possibile allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V F d) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m \leq n$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

V F c) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

V F b) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F d) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

V F b) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2+\mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3+\mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

V F d) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

V F b) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

V F d) Nessun campo contiene divisori dello zero.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(1,1,1)$ e la terna ordinata di vettori $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di equazione $x-y+z=1$ e $-x+y-z=2$ sono fra loro paralleli.

V F c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

V F d) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

V F b) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V F c) La funzione $S-T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

V F b) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

V F c) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

V F c) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

V F d) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

V F c) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

V F b) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

V F b) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F c) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

V F b) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F c) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

V F c) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

V F d) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

V F c) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

V F d) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V F b) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m \leq n$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ non è possibile allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

V F c) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

V F d) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F c) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.
V F b) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.
V F c) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.
V F d) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.
V F b) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.
V F c) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.
V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.
V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.
V F c) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.
V F d) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.
V F b) Nessun campo contiene divisori dello zero.
V F c) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
V F d) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).
V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.
V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.
V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

V F c) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F b) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

V F c) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V F d) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

V F c) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

V **F** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V **F** c) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

V **F** d) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

V **F** b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

V **F** d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

4) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V **F** b) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V **F** c) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

V **F** d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

V F b) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

V F c) Il punto $(0,0,0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

V F c) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

V F d) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m \leq n$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ non è possibile allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

V F d) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.

V F d) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

V F b) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

V F d) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

V F c) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

V F d) Nessun campo contiene divisori dello zero.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

V F b) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F c) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F c) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

V F d) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F b) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

V F c) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F d) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F b) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

V F b) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F b) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

V F c) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

V F d) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

V F b) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

V F d) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

V F b) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F c) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

V F d) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ non è possibile allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m \leq n$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

V F d) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

V F b) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

V F c) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F d) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

V F b) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F d) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

V F b) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

V F c) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V F b) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F c) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

V F d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F c) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

V F d) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

V F b) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

V F c) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

V F c) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

V F c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

V F d) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

V F b) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

V F c) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ non è possibile allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

V F b) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m \leq n$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

V F c) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

V F d) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

4) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

V F b) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\, T$.

V F c) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Se T è suriettiva allora $Im\, T = \mathbf{W}$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

V F b) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

V F d) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F c) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

V F d) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

V F b) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F d) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

V F b) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

V F c) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F d) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\ ^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

V F d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

V F d) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

V F c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

V F d) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

V F c) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

3) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F b) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

V F c) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ non è possibile allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V F d) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m \leq n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

V F c) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

V F b) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F c) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

V F b) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F b) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

V F c) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

V F c) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F b) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

V F c) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

V F d) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F b) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

V F d) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F c) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

V F b) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F d) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

V F b) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

V F c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

V F b) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V F c) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

V F c) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

V F d) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2+\mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3+\mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

V F d) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

V F b) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

3) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F c) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

V F d) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

V F c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

V F d) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ non è possibile allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

V F d) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m \leq n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

V F d) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

V F b) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V F d) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F d) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

V **F** b) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

V **F** c) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V **F** d) Nessun campo contiene divisori dello zero.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V **F** b) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

V **F** c) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

V **F** d) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

V **F** b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V **F** c) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V **F** d) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

V **F** b) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

V **F** c) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

V **F** b) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V **F** c) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V **F** d) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F c) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

V F c) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

V F b) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

V F c) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F d) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

V F c) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F b) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

V F c) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

V F d) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m \leq n$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ non è possibile allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

5) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

V F c) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

V F b) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

V F c) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F d) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

V F b) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F d) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

V F b) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

9) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

V F b) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F c) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F b) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

V F d) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

V F b) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F d) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(0,0,0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

V F b) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F d) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V F d) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

V F b) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

V F d) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V F b) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

V F d) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F c) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

V F c) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

2) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

V F c) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

V F d) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

5) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V **F** b) **S** è possibile se e solo se $m \leq n$.

V **F** c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S** allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

V **F** d) Se **S** non è possibile allora le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V **F** a) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** b) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

V **F** c) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** d) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

V **F** b) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V **F** c) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V **F** d) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

V **F** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V **F** c) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** d) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

V **F** b) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

V **F** c) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V **F** d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V **F** b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

V **F** c) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

V **F** d) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

V **F** b) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

V **F** c) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

V **F** d) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

V **F** c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V **F** a) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V **F** b) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** c) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

V **F** d) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

V **F** b) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V **F** c) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V **F** d) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F c) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

V F c) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

V F d) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

V F c) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V F b) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m \leq n$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ non è possibile allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

V F c) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

V F c) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F d) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

V F c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

V F d) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

V F c) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

V F b) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F d) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

V F b) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F c) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F d) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F d) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F b) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V F c) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

V F d) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

5) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v}\rangle < 0$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\alpha$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

V F b) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

V F c) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

V F d) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

V F c) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

V F c) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

V F d) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se 1 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora T è l'identità.

V F b) Se T non ha autovalori allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se A è diagonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se 0 è un autovalore di T, il polinomio caratteristico di T ha termine costante nullo.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le terne $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2+\mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3+\mathbf{w}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente maggiore di $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F c) Una n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$.

V F d) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente minore di $\dim \mathbf{V}$.

3) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è suriettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F b) L'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F c) Se T è iniettiva, allora $\dim \mathbf{V} = \dim Im\ T$.

V F d) Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ allora $T \circ T$ è iniettiva se e solo se $T \circ T \circ T$ è iniettiva.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il punto $(0, 0, 0)$ e la coppia di vettori $\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$ costituiscono un riferimento cartesiano per il piano $x - y - 4z = 0$.

V F b) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v} + 2\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

V F c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni parametriche.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = 3t, y = t, z = 2t$ e $x = t, y = -3t, z = 0$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici diagonali $n \times n$ è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F b) Il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

V F c) Tutti gli anelli commutativi sono campi.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ha caratteristica 3.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F b) Se in una matrice A si divide una riga per 2 si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della matrice A.

V F c) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe non nulle uguali fra loro.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora il suo determinante non può essere nullo.

V F b) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 5×5 che contenga 22 elementi uguali a 1 è nullo.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $2A$ non è ortogonale.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^i_n \cdot A^i_n = \det A$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ allora $\langle 4\mathbf{u}, 5\mathbf{v} \rangle < 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non contenente solo il vettore nullo ammette un numero infinito di basi ortogonali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono discordi e B_2 e B_3 sono discordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $m - \rho(A)$.

V F c) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m \leq n$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ non è possibile allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T ammette due autovalori distinti allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se A è ortogonale allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Può accadere che il polinomio caratteristico di T abbia grado strettamente superiore a n.

V F d) Se A^2 è diagonalizzabile per similitudine allora anche A è diagonalizzabile per similitudine.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F b) Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale.

V F c) Il prodotto di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) La trasposta di una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice simmetrica è sempre non negativo.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot a^i_1 \cdot A^i_1$, dove A^i_j rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^i_j.

V F c) Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V F d) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia traccia nulla ammette inversa.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} + \dim \mathbf{U} = n$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è simmetrica.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari T e $4T$ hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine.

V F b) La funzione $S - T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Se S e T sono endomorfismi suriettivi allora $S \circ T$ è un endomorfismo suriettivo.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ non è mai $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unico vettore che ha le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$ è il vettore nullo.

V F b) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ di cardinalità $n = \dim \mathbf{V}$. Allora X è una base per $\mathbf{V}$ se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) < \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}, \mathbf{v}_4 - \mathbf{w})$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbf{S}$ è omogeneo.

V F b) $\rho(C) \neq \rho(A) + 2$.

V F c) Se $\rho(A) \neq \rho(C)$ allora $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$.

V F b) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono rappresentazioni cartesiane.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $-x + y - z = 2$ sono fra loro paralleli.

V F d) Il punto $(1, 1, 1)$ e la terna ordinata di vettori $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ costituiscono un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è privo di divisori dello zero.

V F c) L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

V F d) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.