Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

V F c) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

V F d) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F b) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F d) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F c) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

V F d) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

V F b) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F c) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F c) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F d) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F d) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

V F b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

V F c) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

V F d) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\| - \mathbf{u}\| = -\|\mathbf{u}\|$.

V F b) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

V F d) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F b) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}'+\mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F b) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

V F d) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

V F c) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

V F b) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F c) Non esistono vettori di $\mathbf{V}$ che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

V F b) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V F d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

V F b) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F d) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

V F b) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V F d) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

V F b) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

V F c) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

V F d) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

18 febbraio 2013 N. di Matricola: 00111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

V F b) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F c) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

2) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

V F b) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F c) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.

V F d) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

V F c) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

V F b) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

V F b) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F d) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

V F d) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V F b) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

V F d) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

V F b) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V F c) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

V F b) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F c) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

5) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

V F c) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V F d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|-\mathbf{u}\| = -\|\mathbf{u}\|$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

V F b) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

V F c) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

V F b) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

V F b) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

V F c) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Non esistono vettori di $\mathbf{V}$ che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$.

V F c) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

V F b) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

V F c) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.

V F b) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V F c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\| -\mathbf{u} \| = -\| \mathbf{u} \|$.

V F d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

V F c) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

V F d) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** c) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

V **F** d) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.

V **F** b) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V **F** c) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V **F** d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V **F** a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

V **F** b) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

V **F** c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

V **F** d) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V **F** b) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

V **F** c) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V **F** d) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

V **F** b) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

V **F** c) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V **F** d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.
V F b) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.
V F c) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.
V F d) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.
V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.
V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.
V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.
V F c) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.
V F d) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.
V F b) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.
V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).
V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$.
V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.
V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

V **F** b) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

V **F** c) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

V **F** c) Non esistono vettori di $\mathbf{V}$ che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V **F** b) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

V **F** c) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V **F** d) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

V **F** c) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V **F** d) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

V **F** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V **F** c) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

V **F** d) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

V **F** b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

V **F** d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

4) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V **F** c) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** d) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F c) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F c) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

V F d) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V F d) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

V F d) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

V F d) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

V F b) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \dots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

V F d) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

V F b) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.

V F c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\| -\mathbf{u} \| = -\|\mathbf{u}\|$.

V F d) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\, ^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

V F c) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

V F d) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V F c) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V **F** b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V **F** c) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

V **F** d) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** b) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

V **F** c) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

V **F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V **F** b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V **F** d) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

V **F** b) Non esistono vettori di $\mathbf{V}$ che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

9) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V **F** a) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

V **F** b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

V **F** c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

V **F** d) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F b) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

V F c) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

V F d) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.

V F b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\| -\mathbf{u} \| = -\|\mathbf{u}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

V F d) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V F b) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

V F d) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

V F b) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F c) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

V F c) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

V F d) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

V F b) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

V F c) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F b) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F d) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

18 febbraio 2013 N. di Matricola: 01110

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

V F b) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

V F c) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V F b) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

V F c) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

V F d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F b) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

V F c) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F d) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

6) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F c) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S**, allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

7) Sia **V** uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da **V** in **V**.

V F b) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

V F c) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V F d) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

8) Sia **V** uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di **V**. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per **V**.

V F b) Se **U** e **W** sono sottospazi vettoriali di **V** che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

V F c) Non esistono vettori di **V** che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di **V**.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di **V** allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di **V**.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

V F b) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F d) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

V F b) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

V F c) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V F b) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

V F c) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

V F d) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

4) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

V F b) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

V F c) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

V F b) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

V F c) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F c) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F d) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

V F b) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

V **F** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V **F** c) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

V **F** d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

V **F** b) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V **F** c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V **F** d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V **F** a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

V **F** b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

V **F** c) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

V **F** d) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

V **F** b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V **F** b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V **F** c) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

V **F** d) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.

V **F** b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\| -\mathbf{u} \| = -\|\mathbf{u}\|$.

V **F** c) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V **F** d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

V **F** c) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \dots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

V **F** d) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

V **F** c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Non esistono vettori di $\mathbf{V}$ che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V **F** b) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

V **F** d) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

V F c) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

3) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F b) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

V F c) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.

V F d) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

V F b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

V F c) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

V F b) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.

V F c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\| -\mathbf{u} \| = -\|\mathbf{u}\|$.

V F d) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V F c) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

8) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

V F b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

V F d) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

V F b) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

V F c) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

V F c) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F b) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

V F c) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F d) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

V F b) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

V F c) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Non esistono vettori di $\mathbf{V}$ che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$.

V F c) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

V F b) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

V F b) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \dots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

V F b) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V F c) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}'+\mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

V F d) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

2) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

V F b) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

3) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F c) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

V F d) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

V **F** b) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

V **F** c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V **F** d) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.

V **F** b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** c) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V **F** d) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

V **F** b) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

V **F** c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V **F** d) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

V **F** b) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

V **F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V **F** d) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

V **F** c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V **F** d) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

V F b) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

2) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S**, allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

V F b) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

V F c) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F c) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V F d) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

V F b) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F c) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

5) Sia **V** uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

V F b) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da **V** in **V**.

V F c) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V F d) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F c) Non esistono vettori di $\mathbf{V}$ che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

V F b) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

V F c) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

V F b) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F c) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V F d) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

V F c) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.

V F d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\| -\mathbf{u} \| = -\|\mathbf{u}\|$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $n=2$, $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ e $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle=0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ è nullo.

V F b) Una trasformazione lineare $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

V F c) Se $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ allora $\|-\mathbf{u}\|=-\|\mathbf{u}\|$.

V F d) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\,^{\perp}\mathbf{U}=\dim\mathbf{U}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,\tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V F b) I piani di equazione $x-y+z=1$ e $2x-y-3z=2$ sono fra loro ortogonali.

V F c) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1\wedge\tilde{\mathbf{e}}_1)\wedge\tilde{\mathbf{e}}_1\big)\wedge\tilde{\mathbf{e}}_1=\mathbf{0}$.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A=(a^i_j)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A=\sum_{i=1}^n a^i_1\cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F b) Nessuna matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

V F c) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

V F d) Per ogni matrice diagonale $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2=A$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A\cdot(x)=(b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m=n$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}'-2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n-\rho(A)$.

V F d) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

5) Sia $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

V F b) Se $n\geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

V F d) Se $A=A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

V F b) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

V F c) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F b) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F d) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

9) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F c) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono vettori di $\mathbf{V}$ che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

V F b) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F d) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F d) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F b) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

V F b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V F d) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

7) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

V F b) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F c) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

V F d) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V F b) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

V F d) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

V F c) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

V F c) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

2) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V F d) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

V F b) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F d) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

5) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.

V F b) **S** è possibile se e solo se $m = n$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S** allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

V F d) Se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** è possibile.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

V F c) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

V F b) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F c) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

V F b) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

V F c) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V F b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

V F c) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

V F d) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F b) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

V F c) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F d) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

V F c) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

4) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

V F c) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

V F d) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

V F b) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V F c) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Non esistono vettori di $\mathbf{V}$ che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$.

V F c) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.

V F b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\| - \mathbf{u} \| = -\| \mathbf{u} \|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

V F d) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V F b) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.
V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F c) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.
V F d) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.
V F b) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.
V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.
V F d) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

3) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.
V F b) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.
V F c) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.
V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.
V F b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.
V F c) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.
V F d) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.
V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.
V F c) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.
V F d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\| -\mathbf{u} \| = -\|\mathbf{u}\|$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

V **F** b) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

V **F** d) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

V **F** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

V **F** c) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

V **F** d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

V **F** b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

V **F** c) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

V **F** b) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V **F** d) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

V **F** b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

V **F** d) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.

3) Sia **V** uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Non esistono vettori di **V** che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di **V**.

V **F** b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di **V** allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di **V**.

V **F** c) Se **U** e **W** sono sottospazi vettoriali di **V** che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

V **F** d) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di **V**. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per **V**.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V **F** b) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V **F** c) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

V **F** d) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

V F b) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

V F c) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F c) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F d) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

V F b) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F c) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

V F c) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

V F d) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canonicamente associata a T.

V **F** a) Se 1 è l'unico autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è 1 allora T è l'identità.

V **F** b) Se T non ha autovalori positivi allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** c) Se A è triangolare allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** d) Se il polinomio caratteristico di T è t^n allora A è la matrice nulla.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Nessun sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che abbia cardinalità strettamente inferiore a $\dim \mathbf{V}$ può essere una base di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Ogni n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente.

V **F** d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità strettamente superiore a $\dim \mathbf{V}$.

3) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è iniettiva allora $Im\ T = \mathbf{W}$.

V **F** b) Il nucleo di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** c) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** d) T è iniettiva se e solo se $T + T$ è iniettiva.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) $\tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_1$.

V **F** c) Ogni sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V **F** d) Le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = -t+1, z = 2t+3$ e $x = -8t, y = 2t-1, z = -4t$ sono fra loro parallele.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto.

V **F** b) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V **F** c) Tutti i campi sono anche anelli commutativi.

V **F** d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unica matrice $n \times n$ di rango 0 è la matrice nulla.

V **F** b) Ogni combinazione lineare di due matrici $n \times n$ di rango m è una matrice di rango m.

V **F** c) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere colonne non nulle uguali fra loro.

V **F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $ABAB$ è invertibile allora anche A e B sono invertibili.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t \cdot \det A$.

V **F** b) Il determinante di una qualunque matrice quadrata reale 4×4 che contenga 14 elementi uguali a 3 è nullo.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è ortogonale allora $-A$ è ortogonale.

V **F** d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot A^n_i = \det A$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$ allora $\langle -4\mathbf{u}, -5\mathbf{v} \rangle > 0$.

V **F** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

V **F** c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione maggiore o uguale a 2 ammette un numero infinito di basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V **F** d) Date tre basi ordinate B_1, B_2 e B_3 di $\mathbb{R}^n$, se B_1 e B_2 sono concordi e B_2 e B_3 sono concordi, allora B_1 e B_3 sono concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $4\mathbf{x}' - 2\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n - \rho(A)$.

V **F** c) $\mathbf{S}$ è possibile se e solo se $m = n$.

V **F** d) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ è possibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia A la matrice canonicamente associata a T.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T, ne ammette anche infinite altre.

V F b) Se $A = A^2$ allora o 0 o 1 (o entrambi i numeri) sono autovalori di A.

V F c) Se $n \geq 2$, può accadere che il polinomio caratteristico di T non abbia radici reali.

V F d) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche $-A$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\rho(BA) = \rho(A)$.

V F b) La trasposta di una matrice invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F c) La differenza di due matrici ortogonali $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) La trasposta di una matrice ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice diagonalizzabile per similitudine è sempre non negativo.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_1 \cdot A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F c) Per ogni matrice diagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti non negativi esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

V F d) Nessuna matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che abbia determinante nullo ammette inversa.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ allora $\| -\mathbf{u} \| = -\|\mathbf{u}\|$.

V F b) Se n è dispari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono a due a due ortogonali.

V F d) Se $n = 2$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora almeno uno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari T e T^2 hanno lo stesso nucleo.

V F b) La funzione $S \circ T \circ S$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Se S e T sono iniettive allora $S \circ T$ è iniettiva.

V F d) Se $\dim \mathbf{V} = n$ ed esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tali che $S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n)$, allora S e T coincidono.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono vettori di $\mathbf{V}$ che abbiano le stesse componenti rispetto a tutte le basi di $\mathbf{V}$.

V F b) Sia $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Allora X è linearmente indipendente se e solo se X è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che hanno in comune almeno un vettore non nullo, allora ne hanno in comune infiniti.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) $\rho(C) \neq \rho(A) + 3$.

V F c) Se $Sol(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\big((\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1\big) \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$ esiste almeno un insieme di 4 rette a due a due ortogonali.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = 1$ e $2x - y - 3z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F d) $\mathbb{R}^3$ ammette infiniti riferimenti cartesiani distinti.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'usuale anello $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x è anche un campo.

V F b) Il numero 15 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 10.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'usuale anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ non è un anello commutativo.