15 Giugno 2013 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V **F** c) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

V **F** d) Tutti gli anelli con unità sono campi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** b) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

V **F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

V **F** d) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

V **F** b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V **F** c) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V **F** d) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \ldots, 5\mathbf{v}_n)$.

V **F** b) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V **F** c) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n - 1$.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

V F b) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F c) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

V F d) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $m > n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F d) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora $\mathbf{S}$ è possibile.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

V F b) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V F c) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

V F d) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

V F d) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F b) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ e $\mathbf{x}'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $(x'_1 \cdot x''_1, \ldots, x'_n \cdot x''_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

V F b) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0), (0,0,1), (1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n - 1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

V F b) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F c) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

V **F** b) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

V **F** d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V **F** c) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V **F** d) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

V **F** b) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V **F** c) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

V **F** d) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

V **F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

V **F** c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

9) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

V **F** b) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

V **F** c) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

V **F** d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

15 Giugno 2013   N. di Matricola: 00111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

V F b) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F c) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

V F b) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

V F c) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V F b) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V F d) Se $m > n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

4) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

V F c) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

V F b) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n-1$.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V F d) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \ldots, 5\mathbf{v}_n)$.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

V F d) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli con unità sono campi.

V F b) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V F d) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V F b) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

V F d) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F b) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

V F c) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

V F b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F c) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}' = (x_1', \dots, x_n')$ e $\mathbf{x}'' = (x_1'', \dots, x_n'')$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $(x_1' \cdot x_1'', \dots, x_n' \cdot x_n'')$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

V F c) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

6) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V F b) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

V F c) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F b) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

V F c) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F b) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V F c) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \dots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n - 1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V **F** b) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

V **F** c) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

V **F** c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

V **F** d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V **F** b) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V **F** d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V **F** b) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \ldots, 5\mathbf{v}_n)$.

V **F** c) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n - 1$.

V **F** d) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

V F c) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

V F d) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V F b) Se $m > n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F c) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V F d) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V F b) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

V F d) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

V F c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

V F d) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

V F b) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

V **F** b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

V **F** c) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

V **F** d) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V **F** b) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V **F** c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ e $\mathbf{x}'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $(x'_1 \cdot x''_1, \ldots, x'_n \cdot x''_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

V **F** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

V **F** c) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** d) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V **F** b) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

V **F** c) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Tutti gli anelli con unità sono campi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

V F c) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n-1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

V F c) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F b) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F c) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

V F d) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

V F c) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

V F d) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F c) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F d) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \dots, 5\mathbf{v}_n)$.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n-1$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

V F c) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

V F d) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

V F b) Siano **U** e **V** due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per **U** e una rappresentazione cartesiana per **V**. Allora **U** e **V** coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

V F c) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F c) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

V F d) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

7) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di **S** allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di **S**.

V F c) Se $m > n$ allora **S** è impossibile.

V F d) Se le equazioni di **S** sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora **S** è possibile.

8) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

V F c) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

V F d) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0), (0,0,1), (1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

V F b) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

V F c) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F d) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

V F b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V F c) Tutti gli anelli con unità sono campi.

V F d) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V F c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F c) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

V F d) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F b) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F c) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ e $\mathbf{x}'' = (x''_1, \dots, x''_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $(x'_1 \cdot x''_1, \dots, x'_n \cdot x''_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F d) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n-1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

V F b) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

9) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

V F b) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

V F d) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F b) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

V F c) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F d) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

V F d) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ ^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V F b) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n - 1$.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \dots, 5\mathbf{v}_n)$.

V F d) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

V F b) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

V F c) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

V F d) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V F b) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $m > n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

V F c) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

V F d) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V F b) Tutti gli anelli con unità sono campi.

V F c) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

V F d) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F b) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

V F d) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot\sin\alpha$.

2) Siano $S,T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S,T, rispettivamente.

V F a) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

V F b) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

V F c) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F b) L'unica matrice $n\times n$ di rango n è la matrice identica.

V F c) Il quadrato di ogni matrice $n\times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

V F d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F b) L'insieme delle matrici $n\times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il gruppo delle matrici $n\times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+)$.

V F d) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

V F c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ e $\mathbf{x}'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $(x'_1 \cdot x''_1, \ldots, x'_n \cdot x''_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

V F c) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

V F d) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n - 1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

V F c) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

V F d) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n-1$.

V F b) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \dots, 5\mathbf{v}_n)$.

V F c) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V F d) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V F b) Se $m > n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

3) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

V F c) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

V F d) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

V F b) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

V F c) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli con unità sono campi.

V F b) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

V F c) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V F d) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

V F c) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F d) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

V F b) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F c) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

V F d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

2) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F c) Se $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ e $\mathbf{x}'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ sono due soluzioni di **S**, allora $(x'_1 \cdot x''_1, \ldots, x'_n \cdot x''_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

V F d) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

V F c) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

V F d) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F c) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V F d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

V F c) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F d) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n - 1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V F b) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

V F d) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

V F c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n - 1$.

V F c) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V F d) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \ldots, 5\mathbf{v}_n)$.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

V F b) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

V F c) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V F d) Se $m > n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

V F b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F c) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

V F b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V F c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

8) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

V F b) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

V F d) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

2) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

V F c) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

V F b) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

V F c) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F d) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

V F b) Tutti gli anelli con unità sono campi.

V F c) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V F d) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F b) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V F c) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n-1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F b) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

V F b) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F b) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

V F c) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ e $\mathbf{x}'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $(x'_1 \cdot x''_1, \ldots, x'_n \cdot x''_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n-1$.

V F d) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \dots, 5\mathbf{v}_n)$.

2) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

V F c) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

V F d) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0), (0,0,1), (1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

V F c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

V F d) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora $\mathbf{S}$ è possibile.

V F d) Se $m > n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

V F b) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F d) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F b) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F d) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli con unità sono campi.

V F b) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V F c) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

2) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ e $\mathbf{x}'' = (x''_1, \dots, x''_n)$ sono due soluzioni di **S**, allora $(x'_1 \cdot x''_1, \dots, x'_n \cdot x''_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

V F b) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F c) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F c) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

V F d) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

V F b) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F c) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F b) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

V F d) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F b) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F c) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V F d) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n-1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

V F b) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

V F c) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

V F b) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V F d) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

V F c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V **F** b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V **F** d) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V **F** b) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

V **F** d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V **F** b) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

V **F** c) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V **F** d) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $m > n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V **F** b) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V **F** d) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora $\mathbf{S}$ è possibile.

5) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V F b) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

V F d) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V F b) Tutti gli anelli con unità sono campi.

V F c) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

V F d) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

V F b) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

V F d) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \dots, 5\mathbf{v}_n)$.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F c) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n - 1$.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

V F b) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

V F c) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V F b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n-1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F d) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F c) Se $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ e $\mathbf{x}'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $(x'_1 \cdot x''_1, \ldots, x'_n \cdot x''_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F d) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

V F b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F d) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

V F d) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

V F b) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

V F c) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F d) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F c) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V **F** b) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \ldots, 5\mathbf{v}_n)$.

V **F** c) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n-1$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** b) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

V **F** c) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

V **F** d) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V **F** b) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V **F** c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V **F** d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

V **F** b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

V **F** d) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

5) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V F b) Se $m > n$ allora **S** è impossibile.

V F c) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di **S** allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di **S**.

V F d) Se le equazioni di **S** sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora **S** è possibile.

6) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

V F c) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli con unità sono campi.

V F b) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

V F c) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

V F b) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F c) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

V **F** b) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V **F** c) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

V **F** d) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V **F** b) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

V **F** c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V **F** d) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

V **F** c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

4) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V **F** b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

V **F** c) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

V **F** d) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V **F** b) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

V **F** c) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V **F** d) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F b) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V F c) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n-1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

V F d) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V F b) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ e $\mathbf{x}'' = (x''_1, \dots, x''_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $(x'_1 \cdot x''_1, \dots, x'_n \cdot x''_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** b) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

V **F** c) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

V **F** d) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V **F** b) Se $m > n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V **F** c) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** d) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora $\mathbf{S}$ è possibile.

3) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

V **F** b) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.

V **F** c) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.

V **F** d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V **F** b) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V **F** c) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** d) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V **F** b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.

V **F** c) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.

V **F** d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

V **F** b) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

V **F** d) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

V **F** c) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

V **F** d) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

V **F** b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V **F** b) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \ldots, 5\mathbf{v}_n)$.

V **F** c) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n - 1$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

V **F** b) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.

V **F** d) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V **F** b) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

V **F** d) Tutti gli anelli con unità sono campi.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V **F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V **F** c) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n-1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

V **F** d) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V **F** b) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.

V **F** c) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V **F** d) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

V F b) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $\mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ e $\mathbf{x}'' = (x_1'', \ldots, x_n'')$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $(x_1' \cdot x_1'', \ldots, x_n' \cdot x_n'')$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F c) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F d) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.

V F b) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F c) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.

V F d) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se 0 è un autovalore di T e la sua molteplicità geometrica è n allora A_T è la matrice nulla.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $A_S \cdot A_T$ è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se A_S è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) Se i polinomi caratteristici di S e T sono uguali, allora $A_S = A_T$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ è una base ordinata di $\mathbf{V}$.

V F b) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono linearmente dipendenti.

V F c) La n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se lo è la n-upla ordinata $(5\mathbf{v}_1, 5\mathbf{v}_2, \dots, 5\mathbf{v}_n)$.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n-1$.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $Im\ T = \{\mathbf{0_V}\}$ allora $\ker T = \mathbf{V}$.

V F b) $\ker T \cap Im\ T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F c) T è iniettiva se e solo se è biiettiva.

V F d) Se T è iniettiva allora anche T^2 è iniettiva.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Non esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Il vettore $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_1$ è uguale al vettore nullo.

V F c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ coincidono se e solo se tali rappresentazioni cartesiane coincidono.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali interi è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F c) In ogni gruppo tutti gli elementi sono invertibili.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice $n \times n$ di rango n è la matrice identica.

V F b) Il quadrato di ogni matrice $n \times n$ di rango 1 è una matrice di rango 1.

V F c) In una matrice ridotta per righe non ci possono essere righe nulle.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice identica allora A è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$ allora $\det(t \cdot A) = t^n \cdot \det A$.

V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale 4×4 che contenga 4 elementi nulli è nullo.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le righe, allora anche B è ortogonale.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\sum_{i=1}^n a^n_i \cdot \det M^n_i = \det A$, dove M^r_s rappresenta il minore ottenuto da A cancellandone la r-esima riga e la s-esima colonna.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m ammette esattamente m basi ortonormali rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V F d) Se $n = 3$, le basi ordinate di $\mathbb{R}^n$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^n$).

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ e $\mathbf{x}'''$ sono tre soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a $n + \rho(A)$.

V F c) Se $m > n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F d) Se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono tutte multiple di una stessa equazione omogenea allora $\mathbf{S}$ è possibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una stessa base spettrale relativa sia a S che a T, allora $S = T$.
V F b) Se T ammette n autovalori distinti allora anche T^3 ammette n autovalori distinti.
V F c) Il polinomio caratteristico di T ha grado n.
V F d) Se A_S e A_T sono diagonalizzabili per similitudine allora lo è anche $A_S \cdot A_T$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e AB è invertibile allora $\rho(A) = \rho(B) = n$.
V F b) La differenza tra due matrici invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.
V F c) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.
V F d) La trasposta di una matrice non ortogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice non ortogonale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.
V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.
V F c) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti negativi ha determinante negativo.
V F d) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha traccia strettamente positiva allora ammette inversa.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
V F b) Se n è pari allora non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U}$.
V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono vettori di norma 1.
V F d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due trasformazioni lineari invertibili. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo.
V F b) La funzione $S \circ T \circ S \circ T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.
V F c) Se $S^2 = T^2$ allora $S = T$.
V F d) Sia X un sistema di generatori per $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 4$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ rispetto a una qualunque base di $\mathbf{V}$ sono nulle.

V F b) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \ldots + \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno entrambi dimensione $n-1$, allora hanno in comune infiniti vettori.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ sono basi di $\mathbf{V}$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F c) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) = \rho(C)$.

V F d) Se $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ e $\mathbf{x}'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $(x'_1 \cdot x''_1, \ldots, x'_n \cdot x''_n)$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è multiplo dell'altro.

V F c) I piani di equazione $x - y + z = -1$ e $10x - 5y - 15z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 riferimenti cartesiani distinti.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'usuale anello $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti interi nella variabile t non è un campo.

V F b) Il numero 8 rappresenta un divisore dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 12.

V F c) L'insieme dei numeri interi pari è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Tutti gli anelli con unità sono campi.