Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

V F c) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

V F d) Tutti i campi sono anche anelli con unità.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V F c) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

V F d) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F c) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F d) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n-1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

V F b) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V F c) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n + 1$.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

V F b) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F c) T è sempre invertibile.

V F d) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $m = n^2$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

V F b) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V F c) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

V F d) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una per $\mathbf{V}$. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono diversi fra loro.

V F b) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 0$ e $x = 0, y = 0, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F d) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha\mathbf{v}\| = \alpha\|\mathbf{v}\|$.

V F c) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

V F b) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F c) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

V F d) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

V F b) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

V F d) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.

V F b) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.

V F d) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

V F b) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

9) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

V F b) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

V F c) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

V F d) Se $S = -T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

23 Luglio 2013 N. di Matricola: 00111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

V F b) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V F d) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

V F b) T è sempre invertibile.

V F c) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V F d) Se $m = n^2$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

4) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $S = -T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

V F c) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

V F b) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n+1$.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

V F c) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V F d) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n-1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$.

V F b) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F c) $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha\mathbf{v}\| = \alpha\|\mathbf{v}\|$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 0$ e $x = 0, y = 0, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una per $\mathbf{V}$. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono diversi fra loro.

V F d) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi sono anche anelli con unità.

V F b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

V F d) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

V F b) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

V F d) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F b) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.

V F c) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

V F b) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

V F c) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

6) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V F b) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

V F b) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

V F b) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F b) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

V F c) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

V F c) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

V F c) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n-1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V F b) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n-1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

V F c) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n+1$.

V F d) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

V F c) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

V F d) T è sempre invertibile.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V F b) Se $m = n^2$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

V F d) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

V F c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

V F d) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

V F b) Se $S = -T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

V F d) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V F b) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

V F c) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

V F b) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

V F c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) Tutti i campi sono anche anelli con unità.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$.

V F c) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = \alpha \|\mathbf{v}\|$.

V F d) $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 0$ e $x = 0, y = 0, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

V F c) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una per $\mathbf{V}$. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono diversi fra loro.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

V F c) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

V F d) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F b) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F c) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

V F d) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.

V F c) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.

V F d) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n-1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

V F c) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n-1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n+1$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) T è sempre invertibile.

V F c) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

V F d) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

V F b) Siano **U** e **V** due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per **U** e una per **V**. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora **U** e **V** sono diversi fra loro.

V F c) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 0$ e $x = 0, y = 0, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

V F c) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

7) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S** allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

V F c) Se $m = n^2$ allora **S** è impossibile.

V F d) Se **S** è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

8) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $S = -T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

V F c) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

V F d) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$.

V F b) $\big((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha\mathbf{v}\| = \alpha\|\mathbf{v}\|$.

V F d) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0), (2,2,0), (3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.
V F b) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.
V F c) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.
V F d) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.
V F b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
V F d) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.
V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.
V F c) Tutti i campi sono anche anelli con unità.
V F d) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.
V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.
V F c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.
V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.
V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.
V F c) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.
V F d) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V **F** c) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

V **F** d) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

V **F** b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V **F** c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V **F** d) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

V **F** b) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V **F** d) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

9) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

V **F** b) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V **F** c) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

V **F** d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F b) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

V F c) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F d) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

V F d) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

V F b) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n + 1$.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

V F c) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n-1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

V F d) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

V F b) T è sempre invertibile.

V F c) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

V F d) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $m = n^2$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V F b) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

V F c) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

V F b) Tutti i campi sono anche anelli con unità.

V F c) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

V F d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V F b) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

V F c) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

V F d) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F b) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = \alpha \|\mathbf{v}\|$.

V F c) $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

2) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

V F b) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

V F c) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) Se $S = -T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

V F c) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F d) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n-1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

V F c) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

6) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se **S** è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V **F** b) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

V **F** c) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V **F** d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S**, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

7) Sia **V** uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da **V** in **V**.

V **F** b) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.

V **F** c) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.

V **F** d) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di **V**. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

8) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di **V** e **w** è un vettore di **V**, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di **V**.

V **F** b) Se due sottospazi vettoriali **U** e **W** di **V** hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di **V**, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

V **F** c) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di **V** di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di **V**.

V **F** d) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di **V** e **w** è un vettore di **V**, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per **V**.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 0$ e $x = 0, y = 0, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

V **F** c) Siano **U** e **V** due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per **U** e una per **V**. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora **U** e **V** sono diversi fra loro.

V **F** d) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n+1$.

V F b) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n-1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

V F c) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V F d) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

V F b) Se $m = n^2$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

3) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $S = -T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

V F c) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

V F d) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

V F b) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

V F c) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) T è sempre invertibile.

5) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot\cos\alpha$.

V F b) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F c) Se $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, allora $\|\alpha\mathbf{v}\| = \alpha\|\mathbf{v}\|$.

V F d) $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,\tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1+\tilde{\mathbf{e}}_2)\wedge(\tilde{\mathbf{e}}_2+\tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x=t, y=0, z=0$ e $x=0, y=0, z=-t$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una per $\mathbf{V}$. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono diversi fra loro.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi sono anche anelli con unità.

V F b) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

V F d) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ è un anello commutativo con unità.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

V F b) Sia $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A)\neq 0$.

V F c) Se $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V F d) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n\times n$ è una matrice ortogonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

V F b) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F c) Se $A=(a^i_j)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Ogni matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

3) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V F b) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V F d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F b) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.

V F c) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F d) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

V F c) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

V F b) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

V F d) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

V **F** c) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

V **F** b) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n + 1$.

V **F** c) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V **F** d) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n - 1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è sempre invertibile.

V **F** b) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

V **F** c) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** d) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

V **F** c) Se $\mathbf{S}$ è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V **F** d) Se $m = n^2$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

V F b) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

V F c) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

V F b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

V F c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

8) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

V F b) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V F c) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

V F c) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot\cos\alpha$.

V F b) Se $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, allora $\|\alpha\mathbf{v}\| = \alpha\|\mathbf{v}\|$.

V F c) $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

2) Siano $S,T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S,T, rispettivamente.

V F a) Se $S=-T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

V F c) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A)\neq 0$.

V F b) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

V F c) Se $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V F d) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n\times n$ è una matrice ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

V F b) Tutti i campi sono anche anelli con unità.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

V F d) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ è un anello commutativo con unità.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $X=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F b) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

V F c) Se $X=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y=\{\mathbf{v}_1+\mathbf{w},\dots,\mathbf{v}_n+\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})\geq 1$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F b) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F d) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

V F b) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

V F c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una per $\mathbf{V}$. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono diversi fra loro.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 0$ e $x = 0, y = 0, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F b) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.

V F c) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

V F c) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n+1$.

V F d) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n-1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

2) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

V F b) Se $S = -T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) T è sempre invertibile.

V F c) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

V F d) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$.

V F c) $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = \alpha \|\mathbf{v}\|$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 0$ e $x = 0, y = 0, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

V F c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una per $\mathbf{V}$. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono diversi fra loro.

V F d) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

V F d) Se $m = n^2$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

V F d) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F d) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

V F d) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi sono anche anelli con unità.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

V F c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

2) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a **S**.

V F b) Se **S** è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F c) Se **S** è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F c) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

V F d) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V F c) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

5) Sia **V** uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di **V**. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F b) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da **V** in **V**.

V F c) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.

V F d) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

V **F** b) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

V **F** c) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V **F** d) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

V **F** b) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

V **F** d) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V **F** b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

V **F** c) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V **F** d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

V F b) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F b) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

V F c) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F d) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $m = n^2$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

5) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V F b) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

V F c) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

V F b) Tutti i campi sono anche anelli con unità.

V F c) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

V F d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V F b) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

V F c) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

V F d) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n-1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

V F b) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

V F c) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n+1$.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

V F b) T è sempre invertibile.

V F c) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

V F c) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F d) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

V F d) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F b) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

V F b) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 0$ e $x = 0, y = 0, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una per $\mathbf{V}$. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono diversi fra loro.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n-1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

V F d) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

V F b) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F d) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

V F b) Se $S = -T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

V F d) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.

V F b) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.

V F c) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F d) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha\mathbf{v}\| = \alpha\|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha$.

V F c) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F d) $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V F b) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n-1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

V F c) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n+1$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

V F c) T è sempre invertibile.

V F d) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

V F b) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F c) $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = \alpha \|\mathbf{v}\|$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 0$ e $x = 0, y = 0, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una per $\mathbf{V}$. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono diversi fra loro.

V F d) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

5) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V F b) Se $m = n^2$ allora **S** è impossibile.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S** allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

V F d) Se **S** è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

6) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se $S = -T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

V F c) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

V F d) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi sono anche anelli con unità.

V F b) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

V F c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

V F b) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

V F c) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

V F b) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F c) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F b) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

V F c) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

V F b) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

V F c) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n-1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

V F c) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

4) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V F b) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

V F c) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

V F d) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F b) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.

V F c) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F d) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F b) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

V F c) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

V F d) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

V F b) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F d) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

V F c) T è sempre invertibile.

V F d) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V F b) Se $m = n^2$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

3) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

V F b) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

V F c) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

V F c) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

V F b) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

V F d) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V F b) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n - 1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

V F c) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

V F d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n + 1$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V F b) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F c) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

V F d) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

V F b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F c) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

V F d) Tutti i campi sono anche anelli con unità.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

V F b) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

V F d) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F b) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

V F c) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F d) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

5) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F b) Se $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, allora $\|\alpha\mathbf{v}\|=\alpha\|\mathbf{v}\|$.

V F c) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot\cos\alpha$.

V F d) $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

6) Siano $S,T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S,A_T le matrici canonicamente associate a S,T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

V F b) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

V F c) Se $S=-T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A\cdot(x)=(b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-\rho(A)$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}'-\mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

V F c) Se $Sol(\mathbf{S})=\emptyset$ allora $\rho(A)>\rho(C)$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora $\rho(C)=\rho(A)+1$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,\tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x=t,y=0,z=0$ e $x=0,y=0,z=-t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

V F c) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1+\tilde{\mathbf{e}}_2)\wedge(\tilde{\mathbf{e}}_2+\tilde{\mathbf{e}}_3)\|=\sqrt{3}$.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una per $\mathbf{V}$. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono diversi fra loro.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S,T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S=T$.

V F b) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v}\in X$ si ha che $S(\mathbf{v})=T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

V F c) Se $S\circ T=S\circ S$ allora $S=T$.

V F d) La funzione $S+T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) S e T coincidono se e solo se ammettono una stessa base spettrale.

V **F** b) Se $S = -T$ allora A_S e A_T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Se A_S non è simmetrica allora $\mathbb{R}^n$ non ammette una base spettrale relativa a S.

V **F** d) Se A_S e A_T sono simili allora i loro polinomi caratteristici sono uguali.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se le quadruple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora ogni $\mathbf{v}_i$ è multiplo di $\mathbf{w}_i$.

V **F** b) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}$ che abbiano cardinalità strettamente superiore a n sono sistemi di generatori per V.

V **F** c) Se la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di $\mathbf{V}$ è linearmente dipendente allora anche la $n-1$-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ è linearmente dipendente.

V **F** d) Non esistono sistemi di generatori di $\mathbf{V}$ di cardinalità uguale a $n+1$.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è sempre invertibile.

V **F** b) $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** c) T manda il vettore nullo nel vettore nullo.

V **F** d) Se T^2 è iniettiva allora anche T è iniettiva.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Se due punti di $\mathbb{R}^3$ hanno le stesse coordinate rispetto a un fissato riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$, allora coincidono.

V **F** b) $\|(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3)\| = \sqrt{3}$.

V **F** c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$, e siano fissate una rappresentazione cartesiana per $\mathbf{U}$ e una per $\mathbf{V}$. Se tali rappresentazioni cartesiane sono fra loro diverse, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono diversi fra loro.

V **F** d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 0$ e $x = 0, y = 0, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 2 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Il gruppo delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F c) In ogni gruppo esiste un unico elemento neutro.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 ha caratteristica 3.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha rango $r < n$ allora ha determinante nullo.

V F b) Il cubo di ogni matrice reale $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ ridotta per righe è una matrice triangolare.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A^5 è la matrice identica allora A è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$.

V F b) Esiste solo un numero finito di matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A permutandone le colonne, allora anche B è ortogonale.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo, allora $\det A = 0$.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = \alpha \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$.

V F c) $\big((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ e $\big((1,0,0), (2,2,0), (3,3,3)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$ allora $3\mathbf{x}' - 10\mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è impossible allora anche il sistema che si ottiene moltiplicando ogni equazione di S per 2 è impossibile.

V F c) Se $m = n^2$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Può accadere che T ammetta esattamente n autovettori.

V F b) Se $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T allora A_T è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Il polinomio caratteristico di T ammette sempre n radici distinte.

V F d) Se S è l'inversa di T e A_S è diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A_T.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $2A$ è una matrice invertibile.

V F c) Il cubo di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F d) Il quadrato di una matrice ortogonale simmetrica è la matrice identica I.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice simmetrica è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^1_i A^1_i$, dove A^r_s rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a^r_s.

V F c) Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a coefficienti tutti positivi ha determinante positivo.

V F d) Se una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante strettamente positivo allora ammette inversa.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Non esiste alcun sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim\ ^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se le colonne della matrice A canonicamente associata a T sono versori a due a due ortogonali.

V F d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, allora $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e siano $S, T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ due isomorfismi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le trasformazioni lineari S e T hanno lo stesso nucleo se e solo se $S = T$.

V F b) La funzione $S + T$ è un isomorfismo da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$.

V F c) Se $S \circ T = S \circ S$ allora $S = T$.

V F d) Sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbf{V}$. Se per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha che $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, allora S e T coincidono.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se V è uno spazio vettoriale euclideo, le componenti di un qualunque vettore di $\mathbf{V}$ di modulo 1 sono le stesse rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbf{V}$.

V F b) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora anche $Y = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \dots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ hanno in comune almeno due vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{V}$, allora $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 1$.

V F d) Se $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$, allora $Y = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F c) Se $Sol(\mathbf{S}) = \emptyset$ allora $\rho(A) > \rho(C)$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a $\mathbf{S}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se almeno uno dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero infinito di riferimenti cartesiani distinti.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni campo l'operazione di prodotto è sempre commutativa.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 è un campo.

V F c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) Tutti i campi sono anche anelli con unità.