Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F c) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

V F d) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^tA$ è una matrice invertibile.

V F c) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

V F d) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

V F c) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

V F d) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

V F b) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V F c) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

V F d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

V F b) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F c) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

V F d) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V **F** b) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di $\mathbf{S}$ è impossibile.

V **F** c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

V **F** b) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V **F** c) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

V **F** d) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V **F** c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\, {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V **F** b) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è minimo allora $\rho(C) = n$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F c) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F d) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\big((0,0,-1),(0,1,0),(-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che non hanno in comune alcun vettore.

V F b) $\mathbf{V}$ ammette almeno una base.

V F c) $\mathbf{V}$ ammette un unico sistema di generatori.

V F d) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di $\mathbf{V}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

V F d) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

V F d) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

7) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F b) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

V F c) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.

V F d) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A / \det B$.

V F b) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

9) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

V F b) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

V F c) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

V F d) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^tA$ è una matrice invertibile.

V F d) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

V F b) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

V F c) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F d) Se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

4) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

V F c) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

V F d) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

V F b) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

V F d) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

V F b) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

V F c) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V F d) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F c) $\big((0,0,-1),(0,1,0),(-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F d) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.

V F b) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F d) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

9 settembre 2013 N. di Matricola: 01000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

V F d) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

2) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

V F b) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.

V F c) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

V F d) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

V F b) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è minimo allora $\rho(C) = n$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

6) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V **F** b) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

V **F** c) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** d) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

V **F** b) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

V **F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A / \det B$.

V **F** d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

V **F** c) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di $\mathbf{V}$.

V **F** b) $\mathbf{V}$ ammette un unico sistema di generatori.

V **F** c) $\mathbf{V}$ ammette almeno una base.

V **F** d) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che non hanno in comune alcun vettore.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

V **F** b) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

V **F** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A / \det B$.

V **F** c) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

V **F** d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V **F** b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ ^\perp\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V **F** d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V **F** b) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

V **F** c) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

V **F** d) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

V **F** c) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

V **F** d) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

6) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se **S** è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di **S** è impossibile.

V **F** b) Se $m = n$ allora **S** è impossibile.

V **F** c) Se **S** è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

V **F** d) Se **S** è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di **S**, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di **S**.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V **F** b) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** c) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

V **F** d) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

V **F** c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V **F** d) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** c) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V **F** d) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.
V F b) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.
V F d) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

2) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
V F b) Se **S** è minimo allora $\rho(C) = n$.
V F c) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.
V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S**, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^tA$ è una matrice invertibile.
V F b) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.
V F c) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.
V F d) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.
V F b) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.
V F c) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.
V F d) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).
V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.
V F c) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$.
V F d) $\big((0,0,-1),(0,1,0),(-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V **F** c) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

V **F** d) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbf{V}$ ammette almeno una base.

V **F** b) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che non hanno in comune alcun vettore.

V **F** c) $\mathbf{V}$ ammette un unico sistema di generatori.

V **F** d) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di $\mathbf{V}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

V **F** b) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

V **F** c) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

V **F** d) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

9) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

V **F** b) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

V **F** c) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.

V **F** d) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

V F c) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

V F d) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A/\det B$.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V F b) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

V F c) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

V F d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

V F c) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

V F d) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F b) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F c) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

V F c) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

7) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di **S** è impossibile.

V F b) Se **S** è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di **S**, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di **S**.

V F c) Se $m = n$ allora **S** è impossibile.

V F d) Se **S** è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

8) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

V F c) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

V F d) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) $\big((0,0,-1), (0,1,0), (-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3), (2,2,0), (1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F b) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.

V F c) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

V F d) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F c) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.

V F d) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F d) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

V F c) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

V F d) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^tA$ è una matrice invertibile.

V F c) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F d) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

7) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è minimo allora $\rho(C) = n$.

V F b) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S**, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

V F d) Se **S** è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

8) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di **V** che non hanno in comune alcun vettore.

V F b) **V** ammette un unico sistema di generatori.

V F c) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di **V**. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di **V**.

V F d) **V** ammette almeno una base.

9) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

V F b) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V F c) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

V F d) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

V F b) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

V F c) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

V F d) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

V F b) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

V F c) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

V F d) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

V F b) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

V F c) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

V F d) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

6) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

V F b) Se **S** è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di **S**, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di **S**.

V F c) Se $m = n$ allora **S** è impossibile.

V F d) Se **S** è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di **S** è impossibile.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V F b) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

V F c) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

V F d) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F b) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.

V F c) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

V F d) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

V F b) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

V F d) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F b) Se $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, allora $\|\alpha\mathbf{v}\|=|\alpha|\|\mathbf{v}\|$.

V F c) $\big((0,0,-1),(0,1,0),(-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot\sin\alpha$.

2) Siano $S,T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S,T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

V F b) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

V F c) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

V F d) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

V F b) Esistono matrici reali $n\times n$ di rango $r>n$.

V F c) Se $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2\cdot A$ hanno lo stesso rango.

V F d) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n\times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n\times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+)$.

V F d) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A=(a^i_j)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1=0$, allora $\det A=0$.

V F b) Se $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A\cdot B^{-1})=\det A/\det B$.

V F c) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

V F d) Se $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

6) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è minimo allora $\rho(C) = n$.

V F c) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

7) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

V F b) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F c) $\dim \ker T + \dim Im\, T = \dim \mathbf{W}$.

V F d) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbf{V}$ ammette almeno una base.

V F b) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che non hanno in comune alcun vettore.

V F c) $\mathbf{V}$ ammette un unico sistema di generatori.

V F d) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di $\mathbf{V}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F d) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

V F b) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

V F c) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V F d) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

V F b) Se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

3) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

V F c) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

V F d) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

4) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

V F b) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

V F c) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F c) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$.

V F d) $\big((0,0,-1),(0,1,0),(-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V **F** b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

V **F** d) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.

V **F** b) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

V **F** c) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V **F** d) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V **F** b) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

V **F** d) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

V **F** b) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

V **F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

V **F** d) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

V F c) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

V F d) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

2) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F b) Se **S** è minimo allora $\rho(C) = n$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S**, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

V F d) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

3) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V F b) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

V F c) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F d) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A / \det B$.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ ^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V F d) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

7) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

V F b) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F c) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

V F d) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbf{V}$ ammette almeno una base.

V F b) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che non hanno in comune alcun vettore.

V F c) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F d) $\mathbf{V}$ ammette un unico sistema di generatori.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F c) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

V F d) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A / \det B$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

V F c) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

V F b) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

V F c) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V F d) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

V F b) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

V F c) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F d) Se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

V F b) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F d) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

8) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

V F b) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V F c) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

V F d) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

V F c) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$.

V F c) $\big((0,0,-1),(0,1,0),(-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

2) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

V F c) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

V F d) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

V F b) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

V F d) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

V F b) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F d) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F b) $\mathbf{V}$ ammette un unico sistema di generatori.

V F c) $\mathbf{V}$ ammette almeno una base.

V F d) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che non hanno in comune alcun vettore.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

V F b) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

V F d) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

8) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

V F b) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.

V F c) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

V F d) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è minimo allora $\rho(C) = n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V F b) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

V F c) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

V F d) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

2) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

V F b) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

V F d) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

V F c) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

V F d) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F c) $\big((0,0,-1),(0,1,0),(-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F d) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

6) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se **S** è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di **S** è impossibile.

V F b) Se **S** è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di **S**, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di **S**.

V F c) Se **S** è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

V F d) Se $m = n$ allora **S** è impossibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

V F d) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

V F b) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A / \det B$.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

V F d) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.
V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.
V F c) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.
V F d) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

2) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.
V F b) Se $\mathbf{S}$ è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
V F c) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.
V F d) Se $\mathbf{S}$ è minimo allora $\rho(C) = n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.
V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.
V F c) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.
V F d) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.
V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^tA$ è una matrice invertibile.
V F c) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.
V F d) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.
V F b) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.
V F c) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.
V F d) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F b) $\mathbf{V}$ ammette almeno una base.

V F c) $\mathbf{V}$ ammette un unico sistema di generatori.

V F d) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che non hanno in comune alcun vettore.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V F b) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

V F c) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V F d) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

V F b) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V F b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F d) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

V F b) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

V F c) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

V F d) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F b) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di $\mathbf{S}$ è impossibile.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

5) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V F b) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

V F c) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

V F d) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F b) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.

V F c) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

V F d) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^tA$ è una matrice invertibile.

V F b) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

V F d) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

V F b) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

V F c) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V F d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

V F b) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

V F c) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbf{V}$ ammette un unico sistema di generatori.

V **F** b) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che non hanno in comune alcun vettore.

V **F** c) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di $\mathbf{V}$.

V **F** d) $\mathbf{V}$ ammette almeno una base.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** b) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

V **F** c) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

V **F** d) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V **F** b) Se $\mathbf{S}$ è minimo allora $\rho(C) = n$.

V **F** c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** d) Se $\mathbf{S}$ è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V **F** a) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

V **F** b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V **F** c) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A/\det B$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

V F d) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

V F b) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

7) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

V F b) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

V F d) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

8) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.

V F b) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F c) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

V F d) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F c) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F d) $\big((0,0,-1),(0,1,0),(-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V F b) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

V F c) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

V F d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

V F c) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

V F d) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V F b) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3), (2,2,0), (1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V F c) $\big((0,0,-1), (0,1,0), (-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F d) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

5) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se **S** è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di **S** è impossibile.

V **F** b) Se $m = n$ allora **S** è impossibile.

V **F** c) Se **S** è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di **S**, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di **S**.

V **F** d) Se **S** è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

6) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

V **F** c) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

V **F** d) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.

V **F** b) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

V **F** c) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V **F** d) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V **F** b) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

V **F** c) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^tA$ è una matrice invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

V **F** b) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

V **F** c) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

V **F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

V **F** b) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

V **F** d) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

V **F** b) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

V **F** c) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

V **F** c) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

V **F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A / \det B$.

4) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V **F** b) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

V **F** c) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

V **F** d) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

V **F** b) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.

V **F** c) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

V **F** d) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

6) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di $\mathbf{V}$.

V F b) $\mathbf{V}$ ammette un unico sistema di generatori.

V F c) $\mathbf{V}$ ammette almeno una base.

V F d) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che non hanno in comune alcun vettore.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\, ^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è minimo allora $\rho(C) = n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

V **F** c) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

V **F** d) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di $\mathbf{S}$ è impossibile.

V **F** b) Se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V **F** c) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

3) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

V **F** b) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

V **F** c) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** d) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V **F** b) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** d) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

V **F** b) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V **F** d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

V F d) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

V F c) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

V F d) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A / \det B$.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V F b) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

V F c) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

V F d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^tA$ è una matrice invertibile.

V **F** b) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** c) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

V **F** d) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V **F** b) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V **F** c) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

V **F** d) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbf{V}$ ammette un unico sistema di generatori.

V **F** b) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$ che non hanno in comune alcun vettore.

V **F** d) $\mathbf{V}$ ammette almeno una base.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

V **F** b) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

V **F** c) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

V **F** d) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

V **F** b) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\alpha$.

V **F** d) $\big((0,0,-1),(0,1,0),(-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

6) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

V F b) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

V F c) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di $\mathbf{S}$, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Se $\mathbf{S}$ è minimo allora $\rho(C) = n$.

V F d) Se $\mathbf{S}$ è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

V F c) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F d) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

9) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.

V F b) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

V F c) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F d) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V F a) Se S ammette una base spettrale allora ne ammette infinite.

V F b) Se A_S e A_T non sono simili allora non hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se A_S e A_T hanno la stessa traccia allora sono simili.

V F d) Se A_S e A_T sono simili allora hanno lo stesso rango.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 3$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se le triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sono due basi ordinate di $\mathbf{V}$ allora la trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ è un isomorfismo.

V F b) Può accadere che $\mathbf{V}$ non ammetta alcun sistema di generatori.

V F c) Per ogni $k \geq 3$ esiste almeno una base di $\mathbf{V}$ di cardinalità k.

V F d) Ogni sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che contenga più di n elementi è linearmente dipendente.

3) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è invertibile se e solo se T^3 è invertibile.

V F b) Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ allora $T^{-1}(\mathbf{v})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F c) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$, allora $T(-\mathbf{v}) = T(-\mathbf{w})$.

V F d) T è iniettiva se e solo se $\ker T$ non contiene il vettore nullo.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette un numero finito di riferimenti cartesiani distinti.

V F b) $(\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_3) \wedge (\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3) = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2$.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Il gruppo delle matrici simmetriche reali $n \times n$ è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

V F c) Tutti i gruppi contengono infiniti elementi.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 ha caratteristica 5.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici reali $n \times n$ di rango $r > n$.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $2 \cdot A$ hanno lo stesso rango.

V **F** c) Ogni matrice reale triangolare è ridotta per righe.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora è anche invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile, allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A / \det B$.

V **F** b) Se i coefficienti di una matrice quadrata reale A sono tutti interi, allora $\det A$ è un numero intero.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ortogonale e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A scambiando di posto fra loro le prime due righe di A, allora anche B è ortogonale.

V **F** d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonale e $a^1_1 = 0$, allora $\det A = 0$.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è α allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

V **F** c) $\big((0,0,-1),(0,1,0),(-1,0,0)\big)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Le basi ordinate di $\mathbb{R}^3$ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\big((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0)\big)$ sono fra loro concordi (cioè determinano la stessa orientazione di $\mathbb{R}^3$).

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo e $\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$, allora anche $8\mathbf{x}$ è una soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** b) Se $\mathbf{S}$ è impossibile allora anche il sistema che si ottiene permutando l'ordine delle equazioni di $\mathbf{S}$ è impossibile.

V **F** c) Se $m = n$ allora $\mathbf{S}$ è impossibile.

V **F** d) Se $\mathbf{S}$ è omogeneo ammette sempre infinite soluzioni distinte.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali.*

1) Siano $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due trasformazioni lineari e siano A_S, A_T le matrici canonicamente associate a S, T, rispettivamente.

V **F** a) Se n è dispari allora sia S che T ammettono almeno un autovalore reale.

V **F** b) Se A_T è diagonalizzabile allora $\mathbb{R}^n$ ammette una base spettrale relativa a T.

V **F** c) Può accadere che T non ammetta alcun polinomio caratteristico.

V **F** d) Se A_S e A_T sono entrambe diagonalizzabili allora sono fra loro simili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Allora A è invertibile se e solo se $\rho(A) > n$.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A + {}^tA$ è una matrice invertibile.

V **F** c) Il doppio di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è una matrice ortogonale.

V **F** d) Il quadrato di ogni matrice ortogonale $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La traccia di una matrice quadrata è sempre diversa dal suo determinante.

V **F** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hanno le stesse righe ma poste in ordine diverso, allora $\det A = \det B$.

V **F** c) La matrice nulla $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha determinante nullo.

V **F** d) Ogni matrice ortogonale ammette inversa.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^\perp\mathbf{U} > \dim \mathbf{U}$.

V **F** c) Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e solo se la matrice A canonicamente associata a T è ortogonale.

V **F** d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

5) Siano $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\dim \ker T + \dim Im\ T = \dim \mathbf{W}$.

V **F** b) La funzione $3T$ è una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ in $\mathbf{W}$.

V **F** c) Se T manda tutti i vettori di una base di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$, allora T è la trasformazione lineare nulla.

V **F** d) Sia X un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbf{V}$ e sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{W}$. Può accadere che non esista nessuna trasformazione lineare che mandi tutti i vettori di X in $\mathbf{w}$.

6) Sia **V** uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) **V** ammette un unico sistema di generatori.

V F b) **V** ammette almeno una base.

V F c) Esiste almeno una coppia di sottospazi vettoriali di **V** che non hanno in comune alcun vettore.

V F d) Sia $n = 3$ e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori qualunque di **V**. Allora l'insieme $\{\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}, \mathbf{v}+3\mathbf{w}\}$ non può essere una base di **V**.

7) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite, scritto nella forma $A \cdot (x) = (b)$, e sia C la matrice completa del sistema. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $Sol(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \rho(A)$.

V F b) Se **S** è possibile allora $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

V F c) Se **S** è minimo allora $\rho(C) = n$.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono due soluzioni di **S**, allora $\mathbf{x}' - \mathbf{x}''$ è una soluzione di **S**.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ dotato della base canonica $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$.

V F a) Se $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, allora $5\tilde{\mathbf{e}}_1 \wedge 3\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$.

V F b) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u}$ è nullo.

V F c) I piani di equazione $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Una qualunque base di $\mathbb{R}^3$ è un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni campo l'operazione di prodotto è associativa.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F c) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) Tutti i campi sono anche gruppi commutativi rispetto all'operazione di somma.