Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
   C) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.
   D) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.

2) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.
   B) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   C) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.
   D) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.
   B) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   C) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(\mathbb{R})$ in $M_{10\times2}(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   D) se per due trasformazioni lineari S, T da $\mathbb{R}^7$ in $\mathbb{R}^9$ esistono infiniti vettori $v \in \mathbb{R}^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.
   B) se **S** ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
   C) può accadere che A e C siano uguali.
   D) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.
   B) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
   C) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   B) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x + 2y + 2z = 0$ e $x - y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, 2)$, $(3, 4)$ è $(-1, 4)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -2)$ e la retta di equazione $x - 3y = 1$ è 2.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 0))$ è base ortogonale.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.
   B) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.
   C) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.
   C) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.
   D) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il vettore nullo di $M_7(\mathbb{R})$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(\mathbb{R})$.
   B) se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.
   C) i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.
   D) esistono trasformazioni lineari T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.
   B) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.
   C) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.
   D) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

B) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.

C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

D) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.

A) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.

B) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

D) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

B) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

C) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

D) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.

B) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.

C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.
   B) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.
   C) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   D) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   B) può accadere che A e C siano uguali.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
   D) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.
   C) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
   D) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se per due trasformazioni lineari S, T da $\mathbb{R}^7$ in $\mathbb{R}^9$ esistono infiniti vettori $v \in \mathbb{R}^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.
   B) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(\mathbb{R})$ in $M_{10\times2}(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   C) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
   D) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -2)$ e la retta di equazione $x - 3y = 1$ è 2.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 0))$ è base ortogonale.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, 2)$, $(3, 4)$ è $(-1, 4)$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.
   B) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.
   C) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.
   D) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x + 2y + 2z = 0$ e $x - y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v\rangle > 0$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   B) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.
   B) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.
   C) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.
   D) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) esistono trasformazioni lineari T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.
   B) i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.
   C) se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.
   D) il vettore nullo di $M_7(\mathbb{R})$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(\mathbb{R})$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.
   B) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.
   C) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.
   D) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x+2y+2z=0$ e $x-y-z=3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y) = (y,x)$ è una trasformazione lineare.
   C) se per due trasformazioni lineari S, T da $\mathbb{R}^7$ in $\mathbb{R}^9$ esistono infiniti vettori $v \in \mathbb{R}^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.
   D) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(\mathbb{R})$ in $M_{10\times2}(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
B) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.
C) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
D) può accadere che A e C siano uguali.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
A) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
B) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.
C) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
D) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.

7) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$.
B) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v\rangle > 0$.
D) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -2)$ e la retta di equazione $x - 3y = 1$ è 2.
B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, 2)$, $(3, 4)$ è $(-1, 4)$.
D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 0))$ è base ortogonale.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.
B) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
C) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.
D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.
   D) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.
   B) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.
   C) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

3) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   B) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.
   C) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.
   D) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
   B) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.

B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.

C) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.

D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):

A) se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.

B) il vettore nullo di $M_7(\mathbb{R})$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(\mathbb{R})$.

C) i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.

D) esistono trasformazioni lineari T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

B) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.

C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

D) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.

A) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

B) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.

C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

D) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   - A) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.
   - B) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.
   - C) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.
   - D) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   - A) l'insieme $\{(x, y) \in I\!R^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   - B) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.
   - C) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $I\!R^n$.
   - D) l'insieme delle funzioni da $I\!N$ in $I\!N$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   - A) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $M_2(I\!R)$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   - B) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(I\!R)$ in $M_{10\times2}(I\!R)$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   - C) la funzione $F : I\!R^2 \to I\!R^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.
   - D) se per due trasformazioni lineari S, T da $I\!R^7$ in $I\!R^9$ esistono infiniti vettori $v \in I\!R^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   - A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
   - B) può accadere che A e C siano uguali.
   - C) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.
   - D) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $I\!R^n$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.
   D) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.
   D) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
   B) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.
   C) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   B) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.
   D) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x + 2y + 2z = 0$ e $x - y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
   C) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.
   D) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 0))$ è base ortogonale.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -2)$ e la retta di equazione $x - 3y = 1$ è 2.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, 2)$, $(3, 4)$ è $(-1, 4)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   D) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.

6) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.
   B) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   C) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.
   D) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.
   B) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il vettore nullo di $M_7(\mathbb{R})$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(\mathbb{R})$.
   B) i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.
   C) esistono trasformazioni lineari T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.
   D) se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.
   B) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x + 2y + 2z = 0$ e $x - y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -2)$ e la retta di equazione $x - 3y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, 2)$, $(3, 4)$ è $(-1, 4)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 0))$ è base ortogonale.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se per due trasformazioni lineari S, T da $\mathbb{R}^7$ in $\mathbb{R}^9$ esistono infiniti vettori $v \in \mathbb{R}^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.
   B) una trasformazione lineare T da $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ in $M_{10\times 2}(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.
   D) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   B) può accadere che A e C siano uguali.
   C) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.
   C) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.
   D) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
   B) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.
   C) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

9) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   B) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.
   C) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.
   D) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.
   C) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = -\langle v, u\rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.
   B) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.
   C) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.
   D) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.
   D) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.
   B) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.
   C) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.
   B) il vettore nullo di $M_7(\mathbb{R})$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(\mathbb{R})$.
   C) i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.
   D) esistono trasformazioni lineari T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.
   D) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se per due trasformazioni lineari S, T da $I\!R^7$ in $I\!R^9$ esistono infiniti vettori $v \in I\!R^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.
   B) la funzione $F : I\!R^2 \to I\!R^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.
   C) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $M_2(I\!R)$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   D) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(I\!R)$ in $M_{10\times2}(I\!R)$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.
   C) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
   D) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = -\langle v, u\rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.
   D) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $I\!R^n$.
   B) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
   D) può accadere che A e C siano uguali.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.
   B) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.
   C) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.
   B) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.
   C) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   D) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.
   B) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.
   C) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.
   D) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.
   B) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   D) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.

B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

C) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

D) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x+2y+2z=0$ e $x-y-z=3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora

A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.

A) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

B) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.

C) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

D) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):

A) se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.

B) il vettore nullo di $M_7(\mathbb{R})$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(\mathbb{R})$.

C) esistono trasformazioni lineari T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.

D) i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -2)$ e la retta di equazione $x - 3y = 1$ è 2.

B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, 2)$, $(3, 4)$ è $(-1, 4)$.

C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 0))$ è base ortogonale.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   C) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(\mathbb{R})$ in $M_{10\times2}(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   B) se per due trasformazioni lineari S, T da $\mathbb{R}^7$ in $\mathbb{R}^9$ esistono infiniti vettori $v \in \mathbb{R}^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.
   C) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A e C siano uguali.
   B) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
   D) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.
   B) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
   D) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.
   B) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.
   C) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.
   D) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x+2y+2z=0$ e $x-y-z=3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0,1,2),(0,2,1),(2,0,0))$ è base ortogonale.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1,-2)$ e la retta di equazione $x-3y=1$ è 2.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1,2)$, $(3,4)$ è $(-1,4)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1,1,1)$, $(2,0,-1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.
   B) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.
   C) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.
   C) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

3) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.
   B) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.
   C) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   D) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.
   B) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.
   C) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) esistono trasformazioni lineari T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.
   B) i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.
   C) se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.
   D) il vettore nullo di $M_7(\mathbb{R})$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(\mathbb{R})$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.
   D) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.
   D) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   B) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(\mathbb{R})$ in $M_{10\times2}(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   C) se per due trasformazioni lineari S, T da $\mathbb{R}^7$ in $\mathbb{R}^9$ esistono infiniti vettori $v \in \mathbb{R}^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = -\langle v, u\rangle$.
   C) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
   B) può accadere che A e C siano uguali.
   C) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   D) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,4,5)$ rispetto al punto $(1,1,1)$ è il punto $(-1,-2,-3)$.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1,1,1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1,2)$ e $(4,6)$ è uguale a 5.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
   B) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.
   C) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.
   B) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.
   B) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.
   C) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.
   D) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.
   D) l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.
   B) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.
   C) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
   D) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.

4) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.
   B) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   C) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.
   D) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.
   B) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) esistono trasformazioni lineari T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.
   B) se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.
   C) i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.
   D) il vettore nullo di $M_7(\mathbb{R})$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(\mathbb{R})$.

7) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.
   C) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$.
   D) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v\rangle > 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 0))$ è base ortogonale.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -2)$ e la retta di equazione $x - 3y = 1$ è 2.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, 2)$, $(3, 4)$ è $(-1, 4)$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x + 2y + 2z = 0$ e $x - y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x+2y+2z=0$ e $x-y-z=3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1,-2)$ e la retta di equazione $x-3y=1$ è 2.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0,1,2),(0,2,1),(2,0,0))$ è base ortogonale.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1,2)$, $(3,4)$ è $(-1,4)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1,1,1)$, $(2,0,-1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.
   B) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.
   C) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.
   C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
   B) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.
   C) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   B) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.
   C) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.
   D) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.
   B) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(\mathbb{R})$ in $M_{10\times2}(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   C) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   D) se per due trasformazioni lineari S, T da $\mathbb{R}^7$ in $\mathbb{R}^9$ esistono infiniti vettori $v \in \mathbb{R}^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.
   B) può accadere che A e C siano uguali.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
   D) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) i due spazi vettoriali $I\!R^m$ ed $I\!R^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.
   B) il vettore nullo di $M_7(I\!R)$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(I\!R)$.
   C) esistono trasformazioni lineari T da $I\!R^2$ in $I\!R^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.
   D) se $T : I\!R^5 \to I\!R^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) se $(I\!K, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
   B) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   C) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.
   D) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.
   B) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.
   C) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.
   D) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.
   C) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.
   D) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.
   C) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(\mathbb{R})$ in $M_{10\times2}(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   D) se per due trasformazioni lineari S, T da $\mathbb{R}^7$ in $\mathbb{R}^9$ esistono infiniti vettori $v \in \mathbb{R}^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se **S** ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
   B) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.
   C) può accadere che A e C siano uguali.
   D) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
   B) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.
   C) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.
   B) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.

8) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.
   B) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.
   C) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.
   D) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.
   B) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.
   C) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.
   D) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.
   C) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.
   D) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.
   B) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   C) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) esistono trasformazioni lineari T da $I\!R^2$ in $I\!R^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.
   B) i due spazi vettoriali $I\!R^m$ ed $I\!R^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.
   C) se $T : I\!R^5 \to I\!R^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.
   D) il vettore nullo di $M_7(I\!R)$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(I\!R)$.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x+2y+2z = 0$ e $x-y-z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -2)$ e la retta di equazione $x - 3y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, 2)$, $(3, 4)$ è $(-1, 4)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 0))$ è base ortogonale.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.
   D) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
   B) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.
   C) può accadere che A e C siano uguali.
   D) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
   B) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.
   C) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x + 2y + 2z = 0$ e $x - y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -2)$ e la retta di equazione $x - 3y = 1$ è 2.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 0))$ è base ortogonale.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, 2)$, $(3, 4)$ è $(-1, 4)$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.
   B) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.
   C) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.
   D) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.
   C) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(\mathbb{R})$ in $M_{10\times2}(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   D) se per due trasformazioni lineari S, T da $\mathbb{R}^7$ in $\mathbb{R}^9$ esistono infiniti vettori $v \in \mathbb{R}^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   B) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.
   C) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.
   D) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.
   D) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.
   B) esistono trasformazioni lineari T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.
   C) il vettore nullo di $M_7(\mathbb{R})$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(\mathbb{R})$.
   D) se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   D) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
   B) A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.
   D) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.
   C) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.
   C) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.
   D) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\|v\| \leq 0$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = -\langle v, u\rangle$.
   C) se due sottospazi vettoriali di V hanno lo stesso complemento ortogonale coincidono.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) una trasformazione lineare T da $M_{4\times5}(\mathbb{R})$ in $M_{10\times2}(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
   B) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (y, x)$ è una trasformazione lineare.
   D) se per due trasformazioni lineari S, T da $\mathbb{R}^7$ in $\mathbb{R}^9$ esistono infiniti vettori $v \in \mathbb{R}^7$ tali che $S(v) = T(v)$, allora S e T coincidono ovunque.

3) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) può accadere che A e C siano uguali.
   B) se **S** ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette anche infinite altre.
   C) se $m = n$ e $\det A \neq 0$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è non vuoto.
   D) se non è vuoto, l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra i punti $(1, 2)$ e $(4, 6)$ è uguale a 5.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(1, 1, 1)$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$ è uguale a 1.
   D) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 4, 5)$ rispetto al punto $(1, 1, 1)$ è il punto $(-1, -2, -3)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri che si possono scrivere come $7k$ con k intero è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, V è un gruppo commutativo rispetto alla somma $+$.
   C) l'insieme delle matrici reali 8×8 simmetriche è un gruppo rispetto all'usuale somma.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono ovunque strettamente positive è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) A è una matrice regolare se e solo se A^5 è una matrice regolare.
   B) se B è $n \times n$ a traccia e determinante contemporaneamente nulli è la matrice nulla.
   C) le matrici $A \cdot C \cdot B$ e $C \cdot A \cdot B$ hanno lo stesso determinante.
   D) se A è 3×3 triangolare con esattamente 6 coefficienti diversi da 0, è regolare.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) se una matrice A reale $n \times n$ ha rango n l'insieme delle sue colonne è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.
   D) l'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2, y = s, z = s$ e $z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro non paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro né paralleli né ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro non parallele.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T non è invertibile allora 0 è un autovalore di T.
   B) T è diagonalizzabile se e solo se lo è T^2.
   C) se T ammette esattamente n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v\rangle > 0$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione uguale a quella del suo complemento ortogonale.
   D) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$.

2) Sia A una matrice reale 9×9. Allora
   A) se ${}^tA$ è invertibile anche A è invertibile.
   B) la matrice $A^2 + I$ ha necessariamente determinante non nullo (I=matrice identica 9×9).
   C) se tutti i minori 8×8 di A hanno determinante nullo allora anche A ha determinante nullo.
   D) ${}^tA + A$ è una matrice simmetrica.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutti i polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno grado multiplo di 5 è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 a traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali non convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $-2x + 2y + 2z = 0$ e $x - y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se il rango di A è uguale a m allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) se $\dim(Sol(\mathbf{S})) = 2$ allora $\rho(C) = \rho(A) + 2$.
   D) se $n = 3 + m$ allora $Sol(\mathbf{S})$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
A) i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ $(m, n > 0)$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.
B) se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare allora $\dim(Ker\ T) + \dim(Im\ T) = 7$.
C) il vettore nullo di $M_7(\mathbb{R})$ ha sempre le stesse componenti rispetto a qualunque base di $M_7(\mathbb{R})$.
D) esistono trasformazioni lineari T da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha $Ker\ T = Im\ T$.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
A) può accadere che sia $Tr(A) > 0$ e $Tr(B) < 0$.
B) se T ammette n autovalori reali distinti strettamente negativi allora T è invertibile.
C) se V ammette almeno una base spettrale relativa a T allora ammette anche almeno una base spettrale relativa a T^3.
D) A e B hanno lo stesso determinante.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, 2)$, $(3, 4)$ è $(-1, 4)$.
B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo compreso fra i vettori $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ è $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 0))$ è base ortogonale.
D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, -2)$ e la retta di equazione $x - 3y = 1$ è 2.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto all'usuale somma e prodotto.
B) l'insieme dei numeri interi multipli di 3 è un gruppo abeliano rispetto all'usuale somma.
C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante strettamente positivo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
D) esistono gruppi che ammettono più di un elemento neutro.