13 Gennaio 2014 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V **F** b) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

V **F** c) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

V **F** d) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

V **F** b) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.

V **F** c) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V **F** d) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V **F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9$.

V **F** d) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

V **F** b) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni funzione da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ coincidono su un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora coincidono ovunque.

V **F** c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

V F b) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

V F c) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V F c) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

V F d) T ammette sempre almeno una base spettrale.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

V F b) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V F c) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}'-3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Il punto $(-1, 1, -1)$ è il simmetrico di $(1, -1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F b) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

V F c) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

3) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\big({}^{\perp}\mathbf{U}\big) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

V F c) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

V F c) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

V F d) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

V F b) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F c) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

V F d) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** b) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V **F** c) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V **F** d) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.

V **F** b) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

V **F** c) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

V **F** d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V **F** b) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

V **F** c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

9) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

V **F** b) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

V **F** c) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

V **F** d) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.
V F b) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.
V F c) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.
V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.
V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F c) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ coincidono su un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora coincidono ovunque.
V F d) Ogni funzione da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.
V F b) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.
V F c) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.
V F d) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

4) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.
V F b) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.
V F c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.
V F d) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.
V F b) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.
V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.
V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\big({}^{\perp}\mathbf{U}\big) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F b) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Il punto $(-1, 1, -1)$ è il simmetrico di $(1, -1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

V F b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

V F d) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V F b) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

V F d) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

2) Siano **V** e **W** due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F b) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da **V** a **W**.

V F c) Se due trasformazioni lineari da **V** a **W** hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

V F b) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Nessun campo contiene divisori dello zero.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}' - 3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

V F d) Sia **U** un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale **V** e sia $\mathcal{B}$ una base di **V**. Allora **U** ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V F b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V F b) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

V F c) T ammette sempre almeno una base spettrale.

V F d) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F b) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

V F c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

V F b) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F c) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

V F d) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F b) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

V F b) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

V F c) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F d) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

3) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

V F c) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ coincidono su un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora coincidono ovunque.

V **F** b) Ogni funzione da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

V **F** d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

V **F** b) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

V **F** c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** d) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V **F** b) T ammette sempre almeno una base spettrale.

V **F** c) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

V **F** d) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V **F** a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V **F** b) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

V **F** c) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** c) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V **F** d) Nessun campo contiene divisori dello zero.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

V F b) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

V F c) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

V F d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}' - 3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.

V F b) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F c) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

V F d) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

V F b) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

V F c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\left({}^\perp\mathbf{U}\right) = {}^\perp\mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V **F** a) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

V **F** c) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

V **F** d) Il punto $(-1, 1, -1)$ è il simmetrico di $(1, -1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

V **F** c) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

V **F** d) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9$.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V **F** d) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

V **F** b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.

V **F** c) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

V **F** d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F b) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

V F c) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

V F d) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

V F d) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

4) Siano **V** e **W** due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due trasformazioni lineari da **V** a **W** coincidono su un sistema di generatori di **V** allora coincidono ovunque.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Ogni funzione da **V** a **W** è una trasformazione lineare.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F b) Il punto $(-1, 1, -1)$ è il simmetrico di $(1, -1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F c) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

V F d) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F b) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F c) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

V F b) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

V F c) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

8) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

V F b) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

V F c) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

V F d) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\big({}^{\perp}\mathbf{U}\big) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

13 Gennaio 2014 N. di Matricola: 01100

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.

V F b) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F d) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

V F b) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ ^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

V F c) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

V F d) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V F c) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

V F d) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F c) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.

V F c) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}' - 3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

V F d) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

V F b) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

V F c) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

9) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V F c) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

V F d) T ammette sempre almeno una base spettrale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F b) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{W}) = 9$.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

2) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V F b) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Il punto medio del segmento di estremi $(2,0,0)$ e $(0,0,2)$ è il punto $(0,2,0)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

V F d) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Ogni funzione da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare.

V F d) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ coincidono su un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora coincidono ovunque.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia **U** un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale **V** e sia $\mathcal{B}$ una base di **V**. Allora **U** ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

V F c) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

V F d) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V F b) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

V F c) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

V F d) T ammette sempre almeno una base spettrale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

V F b) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

V F c) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

V F d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.

V F b) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F d) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\big({}^\perp\mathbf{U}\big) = {}^\perp\mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

V F b) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

V F c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

V F d) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

V F b) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

V F c) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F d) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F d) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

V F b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

V **F** b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}'-3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V **F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

V **F** b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.

V **F** c) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

V **F** d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

V **F** c) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

V **F** d) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V **F** a) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

V **F** c) Il punto $(-1, 1, -1)$ è il simmetrico di $(1, -1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V **F** d) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

13 Gennaio 2014 N. di Matricola: 01111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

V F c) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

V F c) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

V F d) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

V F b) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

V F c) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

V F d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

V F b) Ogni funzione da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ coincidono su un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora coincidono ovunque.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\big({}^{\perp}\mathbf{U}\big) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F b) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

V F d) Il punto $(-1, 1, -1)$ è il simmetrico di $(1, -1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

V F b) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

V F d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

V F b) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F c) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.

V F d) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9$.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F b) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

V F c) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

V F d) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}' - 3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V F b) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

V F c) T ammette sempre almeno una base spettrale.

V F d) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

V F c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F b) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ ^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F d) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

V F b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

V F c) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F d) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V F b) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

V F c) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

V F d) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F c) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F c) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

V F c) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ coincidono su un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora coincidono ovunque.

V F d) Ogni funzione da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

V F d) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

V **F** b) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

V **F** c) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V **F** d) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

V **F** b) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V **F** a) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V **F** c) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

8) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

V **F** b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V **F** c) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

V **F** d) T ammette sempre almeno una base spettrale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** b) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

V **F** c) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V **F** d) Nessun campo contiene divisori dello zero.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}({}^{\perp}\mathbf{U}) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

V F b) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

V F c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

V F d) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F b) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

V F c) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.

V F d) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

V F b) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

V F d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F b) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{W}) = 9$.

V F b) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F b) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

V F c) Il punto $(-1,1,-1)$ è il simmetrico di $(1,-1,1)$ rispetto a $(0,0,0)$.

V F d) I piani di equazione $x-y=0$ e $x+y+z=0$ sono fra loro ortogonali.

8) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim\mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F b) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

V F c) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

V F d) Sia $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim\mathbf{V}\le\dim\mathbf{W}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}'-3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

V F b) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

V F c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

V F d) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ coincidono su un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora coincidono ovunque.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

V F d) Ogni funzione da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\big({}^\perp\mathbf{U}\big) = {}^\perp\mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F c) Il punto $(-1, 1, -1)$ è il simmetrico di $(1, -1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

V F b) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F d) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

V F b) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

V F c) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

V F d) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

V F c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

V F b) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}' - 3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F c) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.

V F c) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F b) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

V F c) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

V F c) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T ammette sempre almeno una base spettrale.

V F b) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

V F c) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V F d) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

V F b) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V F d) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V F b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

V F c) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V F b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V F b) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

V F d) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F b) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9$.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

V F b) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

V F c) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

5) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V F b) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

V F c) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

V F d) T ammette sempre almeno una base spettrale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

V **F** b) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

V **F** c) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

V **F** d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.

V **F** b) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

V **F** c) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V **F** d) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** c) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V **F** d) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni funzione da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** c) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ coincidono su un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora coincidono ovunque.

V **F** d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0,0,0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

V **F** c) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V **F** d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** b) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

V **F** c) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V **F** d) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}'-3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V **F** b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

V **F** d) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V **F** a) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

V **F** b) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

V **F** c) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Il punto $(-1,1,-1)$ è il simmetrico di $(1,-1,1)$ rispetto a $(0,0,0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

V F b) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

V F c) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

V F d) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

V F b) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

V F c) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

V F d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

8) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F d) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\big({}^{\perp}\mathbf{U}\big) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ coincidono su un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora coincidono ovunque.

V F b) Ogni funzione da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\left({}^{\perp}\mathbf{U}\right) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F b) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Il punto $(-1, 1, -1)$ è il simmetrico di $(1, -1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

V F b) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

V F c) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

V **F** b) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

V **F** c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

V **F** d) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

V **F** b) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

V **F** c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V **F** d) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

V **F** b) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V **F** c) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

V **F** d) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9$.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V **F** d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

V **F** b) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

V **F** c) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V **F** d) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V **F** b) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

V **F** c) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** c) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

V **F** d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

4) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V **F** b) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

V **F** c) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

V **F** d) T ammette sempre almeno una base spettrale.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

V **F** b) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

V **F** c) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

V **F** d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F b) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V F b) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}' - 3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano **V** e **W** due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due trasformazioni lineari da **V** a **W** coincidono su un sistema di generatori di **V** allora coincidono ovunque.

V F b) Ogni funzione da **V** a **W** è una trasformazione lineare.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

V F b) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

V F c) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

V F d) Sia **U** un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale **V** e sia $\mathcal{B}$ una base di **V**. Allora **U** ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

V F b) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.

V F c) T ammette sempre almeno una base spettrale.

V F d) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F b) Nessun campo contiene divisori dello zero.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

V F b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale **U** di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

V F b) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

V F d) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F b) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

V F c) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

V F d) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

V F c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.
V F b) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.
V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.
V F d) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.
V F b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.
V F c) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.
V F d) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.
V F b) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.
V F c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.
V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.
V F b) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.
V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9$.
V F d) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.
V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\big({}^\perp\mathbf{U}\big) = {}^\perp\mathbf{U}$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

V F b) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

V F c) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

V F d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}' - 3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

V F c) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F d) Il punto $(-1, 1, -1)$ è il simmetrico di $(1, -1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.

V F d) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Gli autovalori di T coincidono con quelli di $T \circ T$.

V F b) Se 1 è l'unico autovalore di T allora T è l'identità.

V F c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T relativi ad autovalori distinti è linearmente indipendente.

V F d) Se $n = 7$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è 7.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) Se uno spazio vettoriale contiene solo il vettore nullo allora ha come unica base l'insieme vuoto.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 2×2 simmetriche è uguale a 3.

V F d) Ogni n-upla di vettori distinti di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ coincidono su un sistema di generatori di $\mathbf{V}$ allora coincidono ovunque.

V F c) Ogni funzione da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Ogni isometria di $\mathbb{R}^3$ conserva le distanze fra i punti.

V F b) Due rette di $\mathbb{R}^3$ coincidono se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F c) Il punto $(-1, 1, -1)$ è il simmetrico di $(1, -1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) I piani di equazione $x - y = 0$ e $x + y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante strettamente maggiore di 0 è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) I numeri interi pari sono un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F c) Tutti i campi contengono infiniti elementi.

V F d) Nessun campo contiene divisori dello zero.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ha determinante nullo.

V F b) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F c) Se $\det A = 0$ allora $\det A^{2014} = 0$.

V F d) Se una matrice quadrata reale ha una riga con tutti i coefficienti uguali fra loro allora ha determinante nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^7$ può essere completato a una base di $\mathbb{R}^7$ aggiungendo un opportuno insieme di vettori di $\mathbb{R}^7$.

V F c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^5$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\big({}^{\perp}\mathbf{U}\big) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) Esiste una e una sola base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari omogenei sono possibili.

V F b) Ogni sistema lineare reale è equivalente a un sistema lineare minimo.

V F c) Ogni sistema lineare reale di m equazioni in n incognite è possibile se e solo se $m = n$.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette una e una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Può accadere che T non ammetta alcun autovalore reale.
V F b) T ammette sempre almeno una base spettrale.
V F c) Se il polinomio caratteristico di T ammette 0 come radice allora T non è iniettivo.
V F d) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori distinti.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.
V F b) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2014 ammettono inversa.
V F c) Il determinante è una funzione lineare da $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.
V F d) Se $\det A = 1$ allora $\det A^{2014} = 1$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9$.
V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità 7 di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.
V F c) Esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.
V F d) La chiusura lineare di un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
V F b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.
V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n ammette esattamente n orientazioni distinte.
V F d) Ogni insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$ è incluso in almeno una base ortonormale.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste solo un numero finito di trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$.
V F b) Se due trasformazioni lineari da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ hanno lo stesso nucleo allora coincidono.
V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare iniettiva. Allora $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{W}$.
V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare tale che $\dim Ker\ T = \dim \mathbf{V}$. Allora T è la trasformazione lineare nulla.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale con $\dim \mathbf{V} = 3$. La terna delle componenti del vettore nullo di $\mathbf{V}$ è $(0, 0, 0)$ rispetto a qualunque base di $\mathbf{V}$.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici 4×4 diagonali è uguale a 4.

V F c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base finita.

V F d) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $2\mathbf{x}' - 3\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite è 2.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F a) Esistono punti di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i riferimenti cartesiani su $\mathbb{R}^3$.

V F b) Il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(0, 2, 0)$.

V F c) I piani di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Due rette di $\mathbb{R}^3$ che non sono né parallele né incidenti sono sghembe.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le algebre di Boole sono anche anelli con unità.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 11 è un campo.

V F c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) Tutti gli anelli con unità hanno caratteristica nulla.