Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V **F** b) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V **F** c) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V **F** d) Non esistono gruppi con due soli elementi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^tA$ è una matrice invertibile.

V **F** c) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

V **F** d) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

V **F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

V **F** b) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

V F b) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V F c) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V F c) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

V F d) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F b) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V F c) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\, {}^{\perp}\mathbf{U} = n - \dim \mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

V F b) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

27 gennaio 2014 N. di Matricola: 00110

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

V F b) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\big({}^\perp\big({}^\perp\mathbf{U}\big)\big) = {}^\perp\mathbf{U}$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F c) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

V F c) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V F d) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

V F d) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V **F** c) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V **F** d) Non esistono campi con due soli elementi.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

V **F** b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettiva.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V **F** b) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

V **F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

9) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

V **F** b) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

V **F** c) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

V **F** d) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^tA$ è una matrice invertibile.

V F d) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

V F c) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V F d) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

4) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F b) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

V F c) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

V F d) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

V F b) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\left({}^\perp\left({}^\perp\mathbf{U}\right)\right) = {}^\perp\mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

V F d) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono gruppi con due soli elementi.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V F d) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

27 gennaio 2014 N. di Matricola: 01000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

V F d) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettiva.

V F b) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con due soli elementi.

V F b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V F b) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = n - \dim \mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V F b) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

V F c) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

V F d) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

V F b) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F c) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F b) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

V F d) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

V F b) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

V F b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^\perp\mathbf{U} = n - \dim \mathbf{U}$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F d) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

V F c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V F b) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V F b) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

V F c) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

V F d) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

V F c) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con due soli elementi.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F d) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

27 gennaio 2014 N. di Matricola: 01010

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

V **F** b) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

V **F** c) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

V **F** d) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

V **F** b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

V **F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

V **F** b) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

V **F** c) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V **F** d) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V **F** b) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V **F** c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V **F** d) Non esistono gruppi con due soli elementi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\big({}^\perp\big({}^\perp\mathbf{U}\big)\big) = {}^\perp\mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

V **F** c) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

V **F** c) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

V **F** d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

V **F** c) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettiva.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

V F c) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

V F d) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

V F c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

V F c) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

V F c) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F b) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F c) Non esistono campi con due soli elementi.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V F b) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

V F c) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

8) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F b) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

V F c) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

V F d) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\big({}^{\perp}\big({}^{\perp}\mathbf{U}\big)\big) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F d) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

27 gennaio 2014 N. di Matricola: 01100

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

V F b) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V F c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettiva.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

V F b) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ ^{\perp}\mathbf{U} = n - \dim \mathbf{U}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V F c) Non esistono gruppi con due soli elementi.

V F d) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V F c) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})+\dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{W}) = \dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^tA$ è una matrice invertibile.

V F c) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F d) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

V F d) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

V F b) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

9) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V F c) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

V F d) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})+\dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{W}) = \dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}$.

V F d) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

2) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V F b) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \le \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$.

V F c) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = n - \dim\mathbf{U}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Ogni trasformazione ortogonale $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V F b) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x=0$ e $y=-1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2,0,0)$ e $(0,0,2)$ è il punto $(1,0,1)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n\times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

V F d) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

5) Siano **V** e **W** due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

V F c) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di **V**, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di **V** nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare da **V** a **W** è un sottospazio vettoriale di **W**.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia **U** un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale **V** e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di **V**. Può accadere che **U** non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

V F c) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

V F d) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V F b) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

V F c) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

V F d) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V F b) Non esistono gruppi con due soli elementi.

V F c) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

V F b) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

V F d) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot\sin(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\big({}^\perp\big({}^\perp\mathbf{U}\big)\big) = {}^\perp\mathbf{U}$.

V **F** d) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

V **F** b) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

V **F** c) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

V **F** d) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

V **F** b) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

V **F** c) Se $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V **F** d) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il campo $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ha caratteristica 0.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n\times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** c) Il gruppo delle matrici $n\times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+)$, rispetto alla somma indotta.

V **F** d) Non esistono campi con due soli elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

V **F** b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V **F** c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

V F b) Sia **U** un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale **V** e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di **V**. Può accadere che **U** non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare **S**, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di **S**.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

7) Siano **V** e **W** due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di **V**. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di **V**.

V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

V F c) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettiva.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

V F b) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

V F c) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V F d) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

V F d) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

V F c) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V F d) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F b) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

V F c) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

V F d) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

V F b) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\big({}^{\perp}({}^{\perp}\mathbf{U})\big) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono gruppi con due soli elementi.

V F b) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^tA$ è una matrice invertibile.

V F d) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

V F c) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

V F d) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V F b) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

V F c) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

V F d) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F b) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Non esistono campi con due soli elementi.

6) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = n - \dim\mathbf{U}$.

V **F** d) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

V **F** c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim\mathbf{V}$ è iniettiva.

V **F** d) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

V **F** c) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V **F** d) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V **F** b) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

V F c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F c) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V F d) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

V F b) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

V F b) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = n - \dim \mathbf{U}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V F c) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

8) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V F c) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

V F d) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Non esistono campi con due soli elementi.

V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F d) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\left({}^{\perp}\left({}^{\perp}\mathbf{U}\right)\right) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F b) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

V F c) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

V F d) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

V F b) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

V F d) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F b) Non esistono gruppi con due soli elementi.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F b) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

V F d) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})+\dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{W}) = \dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

V F b) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1,1,1)$ è il simmetrico di $(1,1,-1)$ rispetto a $(1,-1,1)$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x+z=0$ e $y+z=0$ sono fra loro ortogonali.

8) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T=\dim\mathbf{V}$ è iniettiva.

V F b) Se $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V}=\mathbf{W}$, allora anche $T\circ T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V F c) Sia $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V}=\mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}'-4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

V F b) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F c) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

V F d) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

V F d) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\big({}^{\perp}\big({}^{\perp}\mathbf{U}\big)\big) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

V F d) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V F b) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

V F c) Sia **U** un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale **V** e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di **V**. Può accadere che **U** non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con due soli elementi.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F d) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

V F b) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

V F b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

V F d) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono gruppi con due soli elementi.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

V F b) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F c) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

V F c) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F d) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettiva.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F c) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

V F c) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

V F b) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

V F c) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V F d) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V F d) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ ^{\perp}\mathbf{U} = n - \dim \mathbf{U}$.

V F b) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

V F c) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = n - \dim \mathbf{U}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V **F** b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** b) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

V **F** c) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V **F** d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

5) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V **F** b) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

V **F** c) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

V **F** d) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V F b) Non esistono gruppi con due soli elementi.

V F c) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

V F b) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

V F d) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

V F c) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Non esistono campi con due soli elementi.

V F c) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F d) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

V F d) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

V F c) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

V F d) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

V F b) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

V F b) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F c) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

V F d) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

8) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

V F c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettiva.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\big({}^\perp\big({}^\perp\mathbf{U}\big)\big) = {}^\perp\mathbf{U}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\big({}^{\perp}\big({}^{\perp}\mathbf{U}\big)\big) = {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

V F d) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V F b) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F b) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

V F c) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

V F d) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono gruppi con due soli elementi.

V F b) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

V F c) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

V F b) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F d) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F b) Non esistono campi con due soli elementi.

V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

V F c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

4) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V F b) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

V F c) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

V F d) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettiva.

V F b) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F b) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

V F d) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F c) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = n - \dim \mathbf{U}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V F b) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

V F c) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V F b) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

V F b) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

V F c) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

V F d) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F b) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Non esistono campi con due soli elementi.

5) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = n - \dim \mathbf{U}$.

V **F** d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

V **F** d) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

V **F** c) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

V **F** d) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

V **F** c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V **F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V **F** b) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

V F b) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F c) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

V F d) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F c) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F d) Non esistono gruppi con due soli elementi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V F b) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

V F c) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\big({}^\perp({}^\perp\mathbf{U})\big) = {}^\perp\mathbf{U}$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

V F b) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

V F c) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F d) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettiva.

V F c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se 1 è un autovalore di T e T è invertibile, allora 1 è anche un autovalore di T^{-1}.

V F b) Se T è la trasformazione lineare nulla allora 0 è un autovalore di T di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F c) Ogni insieme di autovettori di T è linearmente indipendente.

V F d) Ogni autovettore è una radice del polinomio caratteristico.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con i termini della diagonale principale nulli è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$ se e solo se la chiusura lineare di X coincide con $\mathbf{V}$.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è n.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo. Allora T è un isomorfismo se e solo se $T(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F c) Data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$, la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ che porta ogni vettore di $\mathbf{V}$ nell'n-upla delle sue coordinate rispetto alla predetta base ordinata è un isomorfismo.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} \geq \dim \mathbf{W}$ allora T è suriettiva.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Esiste un numero infinito di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono paralleli.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(-1, 1, 1)$ è il simmetrico di $(1, 1, -1)$ rispetto a $(1, -1, 1)$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + z = 0$ e $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V **F** c) Non esistono campi con due soli elementi.

V **F** d) Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ha caratteristica 0.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due matrici reali 2×2 hanno lo stesso rango, lo stesso determinante e la stessa traccia allora coincidono.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V **F** c) Ogni matrice reale ridotta per righe è triangolare.

V **F** d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora è anche ortogonale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

V **F** b) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se coincidono.

V **F** d) Ogni base di $\mathbb{R}^5$ è anche un sistema di generatori per $\mathbb{R}^5$.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\big({}^\perp\big({}^\perp\mathbf{U}\big)\big) = {}^\perp\mathbf{U}$.

V **F** d) Esistono esattamente n basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i sistemi lineari in almeno due incognite sono possibili.

V **F** b) L'unione di due sistemi lineari possibili è sempre un sistema lineare possibile.

V **F** c) Ogni sistema lineare reale di 8 equazioni in 8 incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre più grande della sua molteplicità algebrica.

V **F** b) Se T è diagonalizzabile, la matrice associata a T rispetto a una sua base spettrale è sempre diagonale.

V **F** c) Se T è iniettivo allora il polinomio caratteristico di T ammette solo 0 come radice.

V **F** d) T è diagonalizzabile se e solo se non ammette alcun autovalore reale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ abbia due righe che sono una l'opposto dell'altra. Allora A non è invertibile.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora anche $A \cdot {}^t\!A$ è una matrice invertibile.

V **F** c) Ogni matrice diagonale reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V **F** d) Il cubo di ogni matrice ortogonale simmetrica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^7$ è una base di $\mathbb{R}^7$.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali con un numero finito di elementi.

V **F** d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è linearmente chiuso.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V **F** b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^\perp\mathbf{U} = n - \dim \mathbf{U}$.

V **F** c) Tutte le basi di un qualunque spazio vettoriale euclideo di dimensione pari sono fra loro concordi.

V **F** d) Se due vettori fra loro distinti appartengono a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora sono fra loro ortogonali.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare e $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, allora anche $T \circ T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare con $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora anche $T(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbf{V}$.

V F c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è suriettiva.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il vettore $(1, 1, 1)$ ha le stesse componenti rispetto a qualunque base ordinata di $\mathbb{R}^3$.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 è uguale a 8.

V F c) Esistono spazi vettoriali finitamente generati che ammettono almeno una base di cardinalità infinita.

V F d) La somma diretta di due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare $\mathbf{S}$, allora anche $5\mathbf{x}' - 4\mathbf{x}''$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

V F b) Ogni sistema lineare reale è possibile se e solo se ha più incognite che equazioni.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$. Può accadere che $\mathbf{U}$ non ammetta alcuna rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 3 equazioni in 5 incognite è 2.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Le matrici di Gram sono sempre matrici quadrate.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ è il punto $(1, 0, 1)$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = -1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di ogni vettore.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nell'anello $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 5 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 è un campo.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un anello commutativo con unità (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) Non esistono gruppi con due soli elementi.