Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F c) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F d) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^t\!A$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V F c) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

V F d) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F b) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

V F d) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n + 1$.

V F b) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F b) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V F c) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F c) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

V F d) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

V F b) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1, 2, 3)$ è il simmetrico di $(3, 2, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F b) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0, 0, 0)$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = {}^\perp\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F c) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p \in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{p(n)}$.

V F c) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

V F d) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F d) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

V F c) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V F d) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \ldots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

9) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

V F b) Se a e b sono autovalori di T, allora $a + b$ è un autovalore di T.

V F c) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

V **F** b) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^tA$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V **F** d) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V **F** b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

V **F** c) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V **F** d) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

V **F** b) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

V **F** c) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V **F** d) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

4) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

V **F** b) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

V **F** c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

V **F** d) Se a e b sono autovalori di T, allora $a + b$ è un autovalore di T.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

V F b) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F c) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n + 1$.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^{\perp}\mathbf{U} = {}^{\perp}\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1, 2, 3)$ è il simmetrico di $(3, 2, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0, 0, 0)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

V F b) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F d) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

V F b) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

V F b) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F b) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

V F c) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F d) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \ldots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p \in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \; \cdots \; \cdot a^n_{p(n)}$.

V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

V F d) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

V F d) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

V **F** b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

V **F** c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p \in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{p(n)}$.

V **F** d) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V **F** b) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

V **F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \ldots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

V **F** b) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n + 1$.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V F b) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F b) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F c) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

V F d) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F c) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

V F c) Se a e b sono autovalori di T, allora $a + b$ è un autovalore di T.

V F d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^tA$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V F b) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F d) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F b) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F c) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = {}^\perp\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

V **F** c) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0, 0, 0)$.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1, 2, 3)$ è il simmetrico di $(3, 2, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

V **F** b) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

V **F** c) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V **F** d) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

V **F** b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

V **F** c) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V **F** d) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p\in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{p(n)}$.

V F b) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

V F c) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

V F d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \dots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F d) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n + 1$.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1, 2, 3)$ è il simmetrico di $(3, 2, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F c) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0, 0, 0)$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

V F b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F c) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V F b) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

V F c) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

8) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

V F b) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

V F c) Se a e b sono autovalori di T, allora $a + b$ è un autovalore di T.

V F d) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^{\perp}\mathbf{U} = {}^{\perp}\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F d) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano **V** e **W** due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

V F b) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V F c) Ogni endomorfismo T di **V** tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di **V**. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per **W**.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

V F b) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale **U** di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F c) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

V F d) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V F c) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F b) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V F c) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

V F d) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^t\!A$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V F c) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

V F d) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

V F d) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

9) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F c) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

V F d) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V **F** b) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V **F** a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V **F** b) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** c) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n + 1$.

V **F** d) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

V F c) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F d) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F b) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

V F c) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

V F d) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F b) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

V F c) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F d) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^tA$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V F b) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^{\perp}\mathbf{U} = {}^{\perp}\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

V F b) Se a e b sono autovalori di T, allora $a + b$ è un autovalore di T.

V F c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

V F b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p \in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{p(n)}$.

V F d) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

V F d) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \ldots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F b) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

V F c) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V F d) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

V F b) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0, 0, 0)$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1, 2, 3)$ è il simmetrico di $(3, 2, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** b) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n+1$.

V **F** c) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

V **F** b) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** c) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V **F** d) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

V **F** b) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

V **F** c) Se a e b sono autovalori di T, allora $a+b$ è un autovalore di T.

V **F** d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V **F** b) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** c) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V **F** d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^{\perp}\mathbf{U} = {}^{\perp}\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V **F** a) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0, 0, 0)$.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1, 2, 3)$ è il simmetrico di $(3, 2, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

V **F** b) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V **F** c) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V **F** d) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

V **F** b) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^t\!A$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V **F** d) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

V **F** c) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p\in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \ \cdots \ \cdot a^n_{p(n)}$.

V F b) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

V F d) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

V F d) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F b) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

V F c) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F d) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \dots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F c) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

V F d) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

V F b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

V F c) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\, T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

V F d) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

V F b) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V F b) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

V F b) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \dots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n + 1$.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

V F c) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V F d) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

V F b) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p \in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{p(n)}$.

V F d) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

V F b) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V F c) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

8) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F c) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

V F d) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

V F c) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^{\perp}\mathbf{U} = {}^{\perp}\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

V **F** d) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

V **F** b) Se a e b sono autovalori di T, allora $a + b$ è un autovalore di T.

V **F** c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

V **F** d) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

V **F** b) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^tA$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V **F** d) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V **F** b) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

V **F** c) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V **F** d) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

V **F** b) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V **F** c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

V **F** d) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

V F b) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

V F c) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V F d) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

V F b) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0, 0, 0)$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1, 2, 3)$ è il simmetrico di $(3, 2, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

8) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

V F b) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n+1$.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

V F c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

V F d) Se a e b sono autovalori di T, allora $a+b$ è un autovalore di T.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^{\perp}\mathbf{U} = {}^{\perp}\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1, 2, 3)$ è il simmetrico di $(3, 2, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0, 0, 0)$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V F b) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F d) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

V F b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

V F c) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

V F d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p \in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{p(n)}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F b) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \ldots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

V F b) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F c) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

V F b) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

V F c) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

V F b) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V F c) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^t\!A$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F d) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

5) Siano **V** e **W** due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

V F c) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V F d) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F b) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

V F c) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F d) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V F d) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

V F c) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V F b) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

V F d) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F b) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

V F c) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

5) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F b) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

V F c) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

V F d) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F b) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

V F c) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F d) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^t\!A$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V F b) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n + 1$.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V F b) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F d) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

V F d) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0,0,0)$.

V F b) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1,2,3)$ è il simmetrico di $(3,2,1)$ rispetto a $(0,0,0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

V F b) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \dots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

V **F** b) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

V **F** c) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

V **F** d) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p \in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{p(n)}$.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se a e b sono autovalori di T, allora $a + b$ è un autovalore di T.

V **F** b) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

V **F** c) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

V **F** d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

8) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V **F** b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

V **F** c) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

V **F** d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V **F** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** c) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = {}^\perp\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n+1$.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F b) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^{\perp}\mathbf{U} = {}^{\perp}\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1, 2, 3)$ è il simmetrico di $(3, 2, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0, 0, 0)$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V F b) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

V F b) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

V F c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

V F d) Se a e b sono autovalori di T, allora $a + b$ è un autovalore di T.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

V F b) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F c) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^t\!A$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

V F c) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F d) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

V F b) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

V F c) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p \in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{p(n)}$.

V F d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F b) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

V F c) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \dots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

4) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F b) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

V F c) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

V F d) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

V F b) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

V F d) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V F b) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

V F b) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.

V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V F b) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

V F b) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

V F c) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F d) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

V F b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^{\perp}\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F d) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p \in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{p(n)}$.

V F b) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

V F d) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \ldots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F c) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

V F d) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n + 1$.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^tA$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V F b) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F c) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

V F d) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F b) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F d) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

V F c) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V F b) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

V F d) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = {}^\perp\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

V F b) Se a e b sono autovalori di T, allora $a+b$ è un autovalore di T.

V F c) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.

V F d) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x+y+z=0$ e $x-2y+z=0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0,0,0)$.

V F c) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1,2,3)$ è il simmetrico di $(3,2,1)$ rispetto a $(0,0,0)$.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $T: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1}: \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V F b) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

V F c) Ogni trasformazione lineare $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

V F d) Sia $T: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se a e b sono autovalori di T, allora $a+b$ è un autovalore di T.
V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile allora tutti i suoi autovalori sono non nulli.
V F c) Ogni insieme di autovettori non nulli di T è linearmente indipendente.
V F d) Ogni autovalore di T è una radice del polinomio caratteristico di T.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
V F b) Un sottoinsieme di cardinalità n di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$ se e solo è linearmente indipendente.
V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è $n+1$.
V F d) Ogni spazio vettoriale è un anello commutativo rispetto all'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$.
V F b) L'immagine di una trasformazione lineare da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{W}$.
V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbf{V}$ e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due vettori qualunque di $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa n-upla di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.
V F d) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora T è suriettiva se e solo se il nucleo di T contiene solo il vettore nullo.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Non esiste alcuna isometria di $\mathbb{R}^3$ che lasci fisso il punto $(0, 0, 0)$.
V F b) Se due piani di $\mathbb{R}^3$ hanno giaciture fra loro diverse, allora non sono paralleli.
V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(1, 2, 3)$ è il simmetrico di $(3, 2, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.
V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - 2y + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali è un gruppo rispetto all'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) In ogni anello le operazioni di somma e di prodotto sono associative.

V F c) Non esistono campi in cui l'operazione prodotto sia non commutativa.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

V F b) Se $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e S_n è l'insieme delle permutazioni su n oggetti, allora $\det A = \sum_{p \in S_n} a^1_{p(1)} \cdot a^2_{p(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{p(n)}$.

V F c) In ogni matrice ortogonale la somma dei quadrati degli elementi di qualsiasi colonna è sempre uguale a 1.

V F d) La composizione di due permutazioni dispari su n oggetti è una permutazione pari.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare $L(X)$ di un qualunque sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente X.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Due spazi vettoriali $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ finitamente generati sono isomorfi se e solo se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$ allora anche $(1\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_3, \dots, n\mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono fra loro ortogonali, allora si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = {}^\perp\mathbf{W}$ allora $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

V F d) Ogni sottoinsieme ortogonale di $\mathbb{R}^n$ non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è possibile se e solo se il rango per righe di A è uguale al suo rango per colonne.

V F b) L'unione di due sistemi lineari impossibili è sempre un sistema lineare impossibile.

V F c) Ogni sistema lineare reale omogeneo di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{R}^7$ ammette almeno una rappresentazione parametrica in tre parametri rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^7$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è sempre strettamente maggiore di 0.

V F b) Le matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F c) Se due autovettori non nulli di T sono associati a uno stesso autovalore, allora sono uno multiplo dell'altro.

V F d) T è diagonalizzabile se e solo se ammette esattamente n autovalori reali distinti.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Supponiamo che le righe della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siano tutte diverse fra loro e non nulle. Allora A è invertibile.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $A \cdot {}^tA$ è invertibile allora anche A è una matrice invertibile.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se tutti gli elementi della sua diagonale principale sono diversi da 0.

V F d) Se A è una matrice ortogonale simmetrica $n \times n$, allora A^{2014} è la matrice identica $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ e $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{W}$.

V F b) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

V F c) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F d) $\mathbb{R}^n$ ha un numero finito di sottospazi vettoriali.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di dimensione h di $\mathbb{R}^n$ si ha che ${}^\perp\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con h equazioni in n incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^n$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare tre basi ordinate $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ tali che ciascuna di esse sia discorde alle altre due.

V F d) L'unione di due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare invertibile, allora anche $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è una trasformazione lineare invertibile.

V F b) Sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare suriettiva e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora $T(\mathcal{B})$ è un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

V F c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è iniettiva.

V F d) Ogni endomorfismo T di $\mathbf{V}$ tale che $\dim Im\ T = \dim \mathbf{V}$ è iniettivo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ le rispettive coordinate di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora $\mathbf{x} = 2\mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 è uguale a 5.

V F c) $\mathbb{R}^n$ contiene sottospazi vettoriali di dimensione infinita.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{U} + \mathbf{U} = \mathbf{U}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche ogni loro combinazione lineare è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) Ogni sistema lineare reale omogeneo è possibile.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana con due equazioni in 5 incognite rispetto alla base canonica ordinata di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Nessun sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite è minimo.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura standard).

V F a) Esistono matrici di Gram non simmetriche.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(4, 4, 4)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $2x = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra i vettori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nell'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 l'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione.

V F b) L'anello $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F c) L'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfi.