Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F d) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F b) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

V F b) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F c) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F b) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F c) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

V F b) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V F c) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V F c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

V F d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V F c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

V F b) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F c) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

V F b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F b) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F c) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

V F d) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F d) Non esistono campi con infiniti elementi.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F b) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V F d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

9) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

V F c) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

V F d) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V F b) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

2) Siano **V** e **W** due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di **V**, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di **W**.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia **U** un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. **U** ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

V F c) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V F d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

4) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

V F b) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

V F c) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F c) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale **V** è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

V F d) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F d) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

V F d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F d) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

16 Giugno 2014 N. di Matricola: 01000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

V F d) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V F c) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con infiniti elementi.

V F b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F c) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

V F b) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V F b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

6) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

V F c) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

V F b) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

V F c) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

V F d) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A+B) = \det A + \det B$.

V F b) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

V F b) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F d) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

V F c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

V F d) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F c) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

V F d) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V F b) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F d) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

V F c) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con infiniti elementi.

V F b) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

V F b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

V F c) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

V F d) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

V F c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F b) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

V F d) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

V F c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

V F b) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

V F d) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V F d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V F d) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

V F d) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

V F c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F c) Non esistono campi con infiniti elementi.

V F d) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

V F c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

8) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

V F b) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

V F d) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F c) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

16 Giugno 2014 N. di Matricola: 01100

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V F c) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

V F d) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

V F b) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F c) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

V F d) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V F c) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F b) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

V F c) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

V F c) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

V F c) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

9) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V F c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

V F b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V F b) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

V F d) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F d) $\dim(\operatorname{Ker} T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

V F c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

V F d) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

V F d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F b) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

V F c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

V F d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F b) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

2) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

V F b) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

V F c) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F b) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F b) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F d) Non esistono campi con infiniti elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

V F b) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V **F** b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** c) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V **F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

V **F** b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V **F** c) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V **F** d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

V **F** b) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

V **F** d) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

V **F** d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

V **F** c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V **F** d) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

V **F** c) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V **F** d) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

3) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

V **F** b) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

V **F** c) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

V **F** d) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

V **F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V **F** c) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V **F** d) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

V **F** c) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

V **F** b) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V **F** c) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V **F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

V **F** d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** c) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F c) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

V F d) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

3) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F c) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

V F c) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F c) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F d) Non esistono campi con infiniti elementi.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V **F** d) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

V **F** b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V **F** c) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

V **F** d) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

V **F** b) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V **F** b) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

V **F** c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

V **F** c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V **F** d) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** b) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

V **F** c) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

V **F** b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** c) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V **F** d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V **F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

V **F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

V **F** b) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V **F** c) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

8) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

V **F** b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V **F** c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V **F** d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V **F** b) Non esistono campi con infiniti elementi.

V **F** c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V **F** d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V **F** d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

2) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

V **F** b) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

V **F** c) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

V **F** b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

V **F** d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V **F** b) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

V **F** c) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V **F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

V **F** c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

V **F** d) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V F c) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

V F b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

8) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V F c) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

V F b) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V **F** b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

V **F** d) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

2) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

V **F** b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

V **F** c) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V **F** b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** c) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V **F** d) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

V **F** d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con infiniti elementi.

V F b) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F d) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V F b) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

V F b) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

16 Giugno 2014 N. di Matricola: 10100

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

V **F** b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V **F** c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

V **F** d) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

V **F** b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V **F** c) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V **F** d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V **F** b) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

V **F** c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

V **F** d) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

V F b) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

V F d) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

V F c) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V F d) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V F b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

V F c) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V F b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

V F b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

V F c) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

5) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

V F c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F b) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

V F c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

V F d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

V F b) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F b) Non esistono campi con infiniti elementi.

V F c) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F d) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

V F b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

V F c) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

V F d) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

8) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F c) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

V F d) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

V F c) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\operatorname{Ker} T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F c) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

V F d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

V F c) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

6) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

V F b) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

V F c) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

V F b) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

V F d) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

V F c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F d) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V **F** b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V **F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

V **F** d) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V **F** b) Non esistono campi con infiniti elementi.

V **F** c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

V **F** c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

4) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V **F** b) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V **F** c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

V **F** d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

V **F** b) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V **F** c) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

V **F** d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

V **F** c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

V **F** d) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\ {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V **F** b) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

V **F** b) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V **F** c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V **F** d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F c) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

V F c) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

3) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

V F c) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F b) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

V F c) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F d) Non esistono campi con infiniti elementi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

V F b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim {}^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

V **F** d) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

V **F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V **F** c) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

V **F** c) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.
V **F** b) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V **F** c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.
V **F** d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
V **F** b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.
V **F** c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.
V **F** d) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.
V **F** b) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.
V **F** c) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.
V **F** d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
V **F** b) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
V **F** d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F b) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

6) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

V F b) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

V F c) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

V F d) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V F b) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

V F c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F d) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se 0 è un autovalore di T, allora T non è invertibile.

V F b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n.

V F c) $S \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale per T, allora ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di T.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene almeno $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F c) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un numero reale.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(0, 0, 0)$ rispetto a $(1, 1, 1)$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $x + y - z = 0$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

V F c) Non esistono campi con infiniti elementi.

V F d) Il campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha caratteristica 1.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$, allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$ non ammette basi ordinate fra loro discordi.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

V F b) Tutti i sistemi lineari sono minimi.

V F c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia regolare ammette una e una sola soluzione.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V **F** b) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

V **F** d) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(2A) = 16 \det A$.

V **F** c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

V **F** d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** b) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V **F** d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim\, ^{\perp}\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

V **F** c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto conserva l'orientazione se e solo se n è pari.

V **F** d) $\mathbb{R}^3$ ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

V **F** b) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

V **F** c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V **F** d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono la stessa base, allora coincidono.

V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari basse 2×2 è 3.

V F c) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ ammette sempre infinite n-uple di coordinate rispetto a qualunque base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^3$ esiste sempre almeno un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{B}$ una base ordinata di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 4 equazioni in 7 incognite è 3.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a n è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto) se e solo se n è primo.

V F d) Non esistono gruppi con esattamente tre elementi.