21 Luglio 2014 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F d) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

V F c) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F b) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

V F d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

V F b) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n - 1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V F c) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^3 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

V F b) $\dim(\operatorname{Im} T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

V F b) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

V F c) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

V F c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

V F d) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F b) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V F c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

V F b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

V F c) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(1, 1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F b) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F c) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F d) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

V F b) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V F d) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

V F b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

V F d) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F b) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

9) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

V F c) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

V F d) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.
V F b) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.
V F c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.
V F d) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.
V F b) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F c) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.
V F b) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.
V F c) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.
V F d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

4) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.
V F b) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.
V F c) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.
V F d) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.
V F b) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
V F c) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.
V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^3 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n-1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V F d) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(1, 1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

21 Luglio 2014 N. di Matricola: 01000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

V F d) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F c) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

V F b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

V F c) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

V F b) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V F c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

5) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V F b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

6) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

V F c) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

V F b) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A\cdot B\cdot A\cdot B) = \det(A^2\cdot B^2)$.

V F b) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A+B$ ha rango n.

V F c) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V F c) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

V F d) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.

V **F** b) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** c) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.

V **F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

V **F** b) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n - 1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V **F** d) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^3 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V **F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

V **F** c) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

V **F** d) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

V F d) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

V F b) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

V F c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F d) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

V F c) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

V F b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

V F c) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

V F d) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

V F c) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

V F b) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

V F c) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F b) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F c) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

V **F** c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(1, 1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

V **F** c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V **F** d) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V **F** d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

V **F** b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V **F** c) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V **F** d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.

V F d) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

V F d) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n - 1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^3 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\text{Im } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

V F d) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(1, 1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

V F c) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

V F d) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

V F c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

8) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

V F b) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

V F d) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F c) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

21 Luglio 2014 N. di Matricola: 01100

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V **F** b) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V **F** c) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

V **F** d) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

V **F** b) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V **F** b) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V **F** c) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V **F** c) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V **F** b) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

V **F** c) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

V F c) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

V F d) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

V F b) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

V F b) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V F c) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F d) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

9) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

V F c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F d) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

V F b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) - \dim\mathbf{W} = \dim\mathbf{U} - \dim(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

2) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V F b) Se $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ e $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) Il prodotto vettoriale del vettore $(0,0,1)$ col vettore $(0,0,2)$ è il vettore nullo.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x=0$ e $z=0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ è il punto $(1/2,1/2,1/2)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma ax^3+b con $a,b\in\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

V F d) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n-1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

V F d) $\dim(\operatorname{Im} T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

V F c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

V F d) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

V F d) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V F b) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

V F c) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

V F d) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V **F** b) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V **F** d) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

V **F** b) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

V **F** c) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** b) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** c) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.

V **F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

V **F** b) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

V **F** c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

V **F** d) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

V F c) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

V F b) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V F d) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(1, 1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F b) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n-1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V F d) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^3 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

V F c) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

V F d) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

V F b) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

V F c) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

V F d) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

V F c) $\dim(\operatorname{Im} T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F d) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F c) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(1, 1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

V F b) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

V F d) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

V F c) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

V F d) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

V F d) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

3) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F c) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

V F d) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F c) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

V F c) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

V F d) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

V F d) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

7) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F c) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

V F d) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

V F b) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

V F c) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

V F c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^3 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n-1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V F d) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

V F c) $\dim(\mathrm{Im}\ T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

V F c) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

V F d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.

V F c) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

V **F** b) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V **F** c) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

8) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

V **F** b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

V **F** c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V **F** d) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

V **F** b) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

V **F** c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

V **F** d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F b) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $^\perp\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di $^\perp\mathbf{U}$.

V F d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

V F b) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

V F c) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

V F d) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F b) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V F c) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

V F d) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

V F b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V F c) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

V F d) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

V F b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2,2,2)$ è il simmetrico di $(1,1,1)$ rispetto a $(0,0,0)$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

8) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F c) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

V F b) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V F c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n-1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma ax^3+b con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F d) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

V F b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

V F c) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\operatorname{Im} T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F b) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x+y-z=0$ e $x+z=0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2,2,2)$ è il simmetrico di $(1,1,1)$ rispetto a $(0,0,0)$.

V F d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

V F d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

V F d) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.

V F b) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

V F b) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

V **F** b) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V **F** c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V **F** d) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

V **F** b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

V **F** c) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V **F** d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V **F** b) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

V **F** c) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

V **F** d) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

V F b) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F b) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V F d) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

V F c) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F d) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

V F b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

V F c) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V **F** b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

V **F** b) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

V **F** c) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

V **F** d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

5) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

V **F** b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

V **F** c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V **F** d) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V F b) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

V F c) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

V F d) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^3 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n-1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V F b) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

V F c) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F d) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

V F b) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

V F d) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(1, 1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

V F b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

V F c) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

V F d) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

8) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F c) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

V F d) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F b) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F c) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n-1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V F b) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

V F c) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^3 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^\perp\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp\mathbf{U}$.

V F d) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(1, 1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V F d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

V F c) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

V F b) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

V F c) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

V F b) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

V F c) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F d) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.
V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.
V F c) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.
V F d) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.
V F b) Non esistono campi con un numero finito di elementi.
V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.
V F d) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.
V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.
V F c) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.
V F d) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

4) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.
V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.
V F c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.
V F d) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.
V F b) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.
V F c) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.
V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V F c) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

V F d) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

V F b) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V F c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\mathrm{Im}\ T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

V F c) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

3) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

V F c) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

V F c) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

V F d) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

V F b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

V F d) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F c) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n - 1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V F b) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

V F c) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^3 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

21 Luglio 2014 N. di Matricola: 11010

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

V F b) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

V F c) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F c) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F d) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V F b) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F c) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

V F d) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

V F b) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

V F d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F b) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F c) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

V F b) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

V F c) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

V F d) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(1, 1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F b) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

V F c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F d) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T ammette un autovalore negativo, allora T non è invertibile.

V **F** b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica e λ è un autovalore di T, allora la molteplicità geometrica e quella algebrica di λ sono fra loro uguali.

V **F** c) $T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Ogni insieme di n autovettori distinti di T è una base spettrale per T.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^3 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** b) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di $n-1$ vettori, allora è linearmente indipendente.

V **F** c) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 non è finitamente generato.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** b) $\dim(\mathrm{Im}\ T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

V **F** c) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{W}$.

V **F** d) Se T è invertibile, allora anche $-T$ è invertibile.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ hanno la stessa giacitura allora sono fra loro parallele.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$, il punto $(2, 2, 2)$ è il simmetrico di $(1, 1, 1)$ rispetto a $(0, 0, 0)$.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $x + y - z = 0$ e $x + z = 0$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici diagonali reali $n \times n$ è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

V **F** b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ a traccia nulla è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto all'usuale somma.

V **F** c) Non esistono campi con un numero finito di elementi.

V **F** d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 0.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A, B abbiano rango n. Allora $A + B$ ha rango n.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^2 \cdot B^2)$.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di quattro sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Ogni sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono sempre fra loro isomorfi.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora è una base di $\mathbb{R}^3$.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) La matrice di Gram di una qualunque k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F b) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$ è ortogonale a ogni vettore di ${}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari di 5 equazioni in 4 incognite sono impossibili.

V F b) Tutti i sistemi lineari omogenei sono minimi.

V F c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare ha una sola soluzione.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{I}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = 3T$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

V F b) Se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno una base spettrale in comune.

V F c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T.

V F d) T è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovalori reali distinti.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici quadrate reali $n \times n$, allora $\det A - \det B = \det(A - B)$.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(-A) = \det A$.

V F c) La matrice identica è una particolare matrice triangolare.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$.

V F b) La chiusura lineare di un insieme di quattro vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ di dimensione 4.

V F c) L'insieme delle matrici reali 4×4 a traccia strettamente maggiore di 0 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e ${}^\perp\mathbf{U} = \mathbf{V}$, allora ${}^\perp\mathbf{V} = \mathbf{U}$.

V F c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo opposto inverte l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ se e solo se n è dispari.

V F d) $\mathbb{R}^5$ ammette una e una sola base ortonormale.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F b) Se A è una matrice associata a T, allora $2A$ è una matrice associata a $2T$.

V F c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

V F d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è simmetrica.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^9$ ammettono uno stesso sistema di generatori, coincidono.

V F b) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_4 = 0$ è 3.

V F c) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli distinti fra loro.

V F d) Dati tre vettori distinti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}$ è soluzione di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora tutte le soluzioni di $\mathbf{S}_0$ sono multiple di $\mathbf{x}$.

V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è maggiore del rango della sua matrice incompleta.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{I}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{U}$ ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{I}$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 10.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(0, 0, 2)$ è il vettore nullo.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ è il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 8 non è un campo.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) Se due gruppi finiti sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.