Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V **F** b) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V **F** c) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V **F** d) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\, A$.

V **F** c) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

V **F** d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

V **F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

V **F** b) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V **F** c) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

V F b) $\dim(\operatorname{Im} T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

V F b) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V F c) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V F c) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

V F d) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F b) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V F c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora ${}^\perp(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = {}^\perp \mathbf{V} + {}^\perp \mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

V F b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F c) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F c) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

V F d) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^\perp\mathbf{U}) = n$.

V F b) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

V F c) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F d) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

V F b) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

V F c) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

V F c) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F d) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

V F b) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}\ \mathrm{T}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F d) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

9) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

V F c) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

V F d) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V **F** b) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\, A$.

V **F** d) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

V **F** b) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

V **F** c) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** b) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

V **F** c) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V **F** d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

4) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

V **F** b) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

V **F** c) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F b) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

V F b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = n$.

V F d) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F b) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

V F c) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F c) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V F d) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F d) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

2) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}\ \mathrm{T}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F c) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

V F d) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F c) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

V F b) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V **F** b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora ${}^{\perp}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = {}^{\perp}\mathbf{V} + {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V **F** d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

6) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V **F** b) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

V **F** c) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** d) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

V **F** b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

V **F** c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

V **F** b) Sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

V **F** c) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** d) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V **F** b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V **F** c) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

15 Settembre 2014 N. di Matricola: 01001

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

V **F** b) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** c) Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

V **F** d) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

V **F** b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $^\perp(\mathbf{U} + \mathbf{V}) =^\perp \mathbf{V} +^\perp \mathbf{U}$.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

V **F** d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V **F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

V **F** c) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

V **F** d) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V F b) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

V F d) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F c) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

V F b) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

V F c) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

V F d) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\, A$.

V F b) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

V F c) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V F b) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F b) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F c) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = n$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

V **F** b) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V **F** d) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

V **F** c) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

V **F** c) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}\ \mathrm{T}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V **F** d) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

15 Settembre 2014 N. di Matricola: 01011

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

V F b) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

V F d) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

V F d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

V F d) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

V **F** b) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V **F** d) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V **F** b) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V **F** c) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

V **F** d) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V **F** b) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

V **F** c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

V **F** d) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

8) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

V **F** b) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

V **F** d) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = n$.

V **F** c) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

V **F** d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

15 Settembre 2014 N. di Matricola: 01100

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

V **F** b) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}\ \mathrm{T}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V **F** c) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

V **F** d) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora ${}^\perp(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = {}^\perp \mathbf{V} + {}^\perp \mathbf{U}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V **F** b) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V **F** c) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

V **F** d) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V **F** c) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\ A$.

V F c) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V F d) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

V F b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F d) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

9) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

V F b) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V F c) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

V F d) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V **F** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora ${}^\perp(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = {}^\perp \mathbf{V} + {}^\perp \mathbf{U}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V **F** b) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

V **F** b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** c) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

V **F** d) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

V F d) $\dim(\mathrm{Im}\ T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F b) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

V F c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

V F d) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V F b) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

V F c) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

V F d) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V F b) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

V F c) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\ A$.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V F c) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

V F d) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F b) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = n$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

V F b) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

V F c) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

V F b) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) Sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F d) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

V F d) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

V F b) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}$ T, allora T non può essere un isomorfismo.

V F d) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

V F b) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

V F c) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F c) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

V **F** c) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V **F** d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

V **F** c) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V **F** d) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

3) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

V **F** b) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

V **F** c) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

V **F** d) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

V **F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

V **F** c) $\dim(\mathrm{Im}\ T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V **F** d) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V **F** b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V **F** c) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = n$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

V **F** b) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V **F** d) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

V **F** b) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V **F** c) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V **F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V **F** b) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

V **F** c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\, A$.

V **F** d) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** b) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

V **F** c) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

V **F** b) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

V **F** c) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V **F** b) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V **F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

V **F** d) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

3) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V **F** b) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

V **F** c) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** d) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

V **F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F c) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

V F d) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora ${}^\perp(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = {}^\perp \mathbf{V} + {}^\perp \mathbf{U}$.

V F d) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

7) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

V F b) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

V F c) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

V F d) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}\ \mathrm{T}$, allora T non può essere un isomorfismo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

V F b) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

V F c) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

V F b) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

V F c) $\dim(\mathrm{Im}\ T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V F d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

V F c) Sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

V F d) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $^\perp(\mathbf{U} + \mathbf{V}) =^\perp \mathbf{V} +^\perp \mathbf{U}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V **F** c) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

8) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

V **F** b) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V **F** c) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

V **F** d) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

V **F** b) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V **F** d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F b) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = n$.

V F d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

V F b) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

V F c) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V F c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\operatorname{Tr}(-A) = \operatorname{Tr} A$.

V F d) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F b) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

V F c) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V F c) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

V F d) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U}+\mathbf{W}$.

V **F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** c) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V **F** c) I punti $(2,2,2)$ e $(-2,-2,-2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x+5y-3z-c=0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

V **F** b) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}\ \mathrm{T}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V **F** c) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

V **F** d) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

V **F** b) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V **F** c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V **F** d) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

V F d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

2) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

V F b) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

V F c) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\mathrm{Im}\ T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

V F c) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F b) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^\perp\mathbf{U}) = n$.

V F d) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

V F b) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F c) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V F b) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

V F b) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

V F d) Sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

V F b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

V F b) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F c) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F b) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F c) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V F b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\, A$.

V F c) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

V F d) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

V F b) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}\, \mathrm{T}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F d) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F b) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

V F c) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V F d) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

7) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

V F c) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V F d) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F d) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora ${}^{\perp}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = {}^{\perp}\mathbf{V} + {}^{\perp}\mathbf{U}$.

V F b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

V F c) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V **F** b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $^\perp(\mathbf{U} + \mathbf{V}) =^\perp \mathbf{V} +^\perp \mathbf{U}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V **F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

V **F** b) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

V **F** c) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V **F** d) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

5) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V **F** b) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

V **F** c) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

V **F** d) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V **F** b) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

V **F** c) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V **F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\, A$.

V **F** b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V **F** c) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

V **F** d) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

V **F** b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** c) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

V **F** b) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

V **F** c) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V **F** d) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V F b) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F d) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

V F b) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

V F c) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F b) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F c) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

V F d) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

V F c) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

V F d) Sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

7) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

V F b) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

V F c) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

V F d) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

8) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}\ \mathrm{T}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F b) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

V F c) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

V F d) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

V F b) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F c) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

V F c) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = n$.

V F d) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F b) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

V F c) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

V F c) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

V F b) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

V F c) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

V F b) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

V F b) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

V F c) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

V F d) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\ A$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F b) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

V F c) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

V F c) Sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

V F d) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F b) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F d) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

V F c) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

V F d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

4) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V F b) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

V F c) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

V F d) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

V F b) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \operatorname{Im} \mathrm{T}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V F c) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

V F d) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V F c) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

V F d) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V F c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora ${}^\perp(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = {}^\perp \mathbf{V} + {}^\perp \mathbf{U}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

V F b) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\operatorname{Im} T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

V F c) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

V F d) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

V F c) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

3) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

V F b) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

V F c) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V F b) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

V F c) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

V F d) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

V F b) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora ${}^\perp(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = {}^\perp \mathbf{V} + {}^\perp \mathbf{U}$.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F d) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

V F b) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

V F c) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0, 0, 0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V F c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

V F c) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\, A$.

V F b) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

V F c) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F c) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F d) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

V F c) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

V F d) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V F b) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

V F d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

V F b) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

V F c) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V F d) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^{\perp}\mathbf{U}) = n$.

6) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

V F b) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

V F c) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

V F d) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F c) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F d) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

9) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}$ T, allora T non può essere un isomorfismo.

V F b) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

V F c) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

V F d) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se 1 è un autovalore di T, allora T è invertibile.

V F b) La matrice reale identica $n \times n$ ha 1 come unico autovalore, e tale autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica uguali a n.

V F c) $T \circ T \circ T$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni insieme di n autovettori linearmente indipendenti di T è una base spettrale per T.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x di grado esattamente uguale a 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) Se un sottoinsieme Y di uno spazio vettoriale $\mathbf{W}$ di dimensione n contiene $n+1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

V F c) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^2$ non è finitamente generato.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto al prodotto per uno scalare.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\dim \mathbf{V} \neq \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere iniettiva.

V F b) $\dim(\mathrm{Im}\ T) = 0$ se e solo se T manda tutti i vettori di $\mathbf{V}$ nel vettore nullo di $\mathbf{W}$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathbf{V}$, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori per $T(\mathbf{V})$.

V F d) Se T è invertibile, allora anche $2014 \cdot T$ è invertibile.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F b) Due piani di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

V F c) I punti $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ sono fra loro simmetrici rispetto a qualunque punto di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 5y - 3z - c = 0$ con c costante reale sono fra loro paralleli.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici diagonali reali 2×2 invertibili è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima colonna nulla è un gruppo rispetto all'usuale somma.

V **F** c) Non esistono campi con esattamente 2 elementi.

V **F** d) Il campo $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 7 ha caratteristica 49.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unica matrice reale 3×3 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** b) Sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A abbia rango n. Allora anche $5A$ ha rango n.

V **F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B) = \det(A^3 \cdot B^3)$.

V **F** d) Sia A una matrice quadrata reale con A^{2014} uguale alla matrice nulla. Allora A non è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbf{U}$.

V **F** c) Due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono sempre fra loro isomorfi.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, allora $\{(0,0,0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) La matrice di Gram di una k-upla ordinata di vettori di $\mathbb{R}^n$ non è mai simmetrica.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2n}$ e $\dim \mathbf{U} = n$, allora si ha che $\dim(^\perp\mathbf{U}) = n$.

V **F** d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^{2014}$ ammette basi ordinate fra loro discordi.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Unendo due sistemi lineari impossibili si ottiene sempre un sistema lineare impossibile.

V **F** b) Nessun sistema lineare di 10 equazioni in 4 incognite è minimo.

V **F** c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice completa sia regolare è privo di soluzioni.

V **F** d) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione parametrica rispetto a $\mathcal{B}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^7$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathcal{B}$ è una base spettrale sia per S che per T, allora è una base spettrale anche per $S \circ T$.

V **F** b) S e T coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Il polinomio caratteristico di T ammette 7 radici distinte.

V **F** d) T è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è 7.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Non esiste alcuna matrice quadrata reale A tale che $\det A = \det(-A)$.

V **F** b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\mathrm{Tr}(-A) = \mathrm{Tr}\, A$.

V **F** c) Se A è una matrice diagonale anche A^{2014} è una matrice diagonale.

V **F** d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono anche sottospazi vettoriali di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

V **F** b) La chiusura lineare di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali diagonali $n \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora ${}^\perp(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = {}^\perp\mathbf{V} + {}^\perp\mathbf{U}$.

V **F** c) L'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda ogni vettore nel suo triplo conserva l'orientazione di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

5) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale finitamente generato e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\dim \mathbf{V} > \dim \mathrm{Im}\ \mathrm{T}$, allora T non può essere un isomorfismo.

V **F** b) Se A è una matrice associata a T rispetto a una data base di $\mathbf{V}$, allora A è la matrice associata a T anche rispetto a qualunque altra base di $\mathbf{V}$.

V **F** c) Se T è biiettiva, allora è un isomorfismo.

V **F** d) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è diagonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ di $\mathbb{R}^9$ ammettono due sistemi di generatori fra loro diversi, allora non può essere $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

V F b) La dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{R}^4$ che contiene tutti e soli i vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ è 1.

V F c) Esistono spazi vettoriali che contengono un numero finito di vettori.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, almeno uno dei tre insiemi $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$, allora anche $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$ è soluzione di $\mathbf{S}_0$.

V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono una sola rappresentazione cartesiana rispetto a $\mathcal{B}$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo minimo di 5 equazioni in 5 incognite è 0.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale del vettore $(0, 0, 1)$ col vettore $(1, 1, 1)$ è il vettore nullo.

V F b) In $\mathbb{R}^3$, il punto medio del segmento di estremi $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ è il punto $(2, 2, 2)$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione invertibile $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conserva la norma di $\mathbf{v}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme degli interi pari è un gruppo abeliano rispetto all'usuale operazione di somma.

V F b) L'anello delle matrici reali 5×5 (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne) è un campo.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti razionali è un anello (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) Ogni gruppo isomorfo all'usuale gruppo degli interi $(\mathbb{Z}, +)$ è abeliano.