*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x, y) = (x, y)$, $r(x, y) = (x, -y)$, $s(x, y) = (-x, y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
   A) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.
   B) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.
   C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.
   D) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.

2) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   B) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   C) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.
   D) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.
   B) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   C) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.
   D) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.

4) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.
   B) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.
   C) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   D) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

6) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   B) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
   C) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.
   D) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   B) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   D) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   C) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.
   B) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.
   C) $A = B$.
   D) $\det A = \det B$.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.
   B) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   C) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.
   D) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.

4) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.
   B) $\dim ImT = n - \rho(A)$.
   C) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   D) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.

5) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
   B) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   C) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.
   D) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.

6) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora

A) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.

B) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.

C) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.

D) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

B) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.

C) $\rho(C) \geq \rho(A)$.

D) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.

8) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?

A) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.

B) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.

C) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1y_2y_3 = 0$.

D) insieme delle successioni reali non decrescenti.

9) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora

A) $V$ ammette almeno una base ortogonale.

B) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.

C) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.

D) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w\rangle \geq 0$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.
   B) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   C) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   D) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   D) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.

3) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.
   B) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.
   C) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
   D) se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è linearmente indipendente.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.
   B) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   C) $V$ ammette almeno una base ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.
   B) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.
   C) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   D) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.

6) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.

B) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.

C) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.

D) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.

B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.

C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?

A) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.

B) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.

C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.

D) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.

9) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x, y) = (x, y)$, $r(x, y) = (x, -y)$, $s(x, y) = (-x, y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora

A) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.

B) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.

C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.

D) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(3,4)$ e la retta di equazione $x-y=0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) la conica di equazione $y=-x^2$ è una parabola.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(2,3)$ e il punto di coordinate $(-2,0)$ è 5.
   D) le rette di equazioni cartesiane $4x-2y=0$ e $10x+5y=0$ sono fra loro ortogonali.

2) Sia **S** un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) **S** ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.
   B) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   C) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad **S** è uno spazio vettoriale.
   D) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m=n$ allora **S** ammette una ed una sola soluzione.

3) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora
   A) $(\mathbf{R},+)$ è un campo.
   B) $(\mathbf{R},+,*)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{R},+)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R},*)$ è un gruppo.

4) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n>0$ e siano $A,B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \det B$.
   B) $A=B$.
   C) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.
   D) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T+T^2+T^3$.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x-z=2 \\ y=1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
B) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
C) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.
D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

7) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
A) insieme delle successioni reali non decrescenti.
B) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.
C) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.
D) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1 y_2 y_3 = 0$.

8) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
B) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
C) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
D) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.

9) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.
B) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
C) $\dim ImT = n - \rho(A)$.
D) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   B) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
   C) $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   D) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.

2) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle successioni reali non decrescenti.
   B) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.
   C) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.
   D) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1 y_2 y_3 = 0$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.

4) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.
   B) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.
   C) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.
   D) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   B) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.

6) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
B) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
C) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.
D) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
B) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.
C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
D) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.
C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.
D) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.

9) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora
A) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
B) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
C) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.
D) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   B) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
   D) $V$ ammette almeno una base ortogonale.

2) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.
   B) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.
   C) $A = B$.
   D) $\det A = \det B$.

3) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   B) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.

4) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x, y) = (x, y)$, $r(x, y) = (x, -y)$, $s(x, y) = (-x, y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
   A) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.
   B) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.
   C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.
   D) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.
   B) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.
   C) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.

7) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImT = n - \rho(A)$.
   B) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.
   C) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   D) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.

8) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   B) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.
   D) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.

9) Sia **S** un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad **S** è uno spazio vettoriale.
   B) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora **S** ammette una ed una sola soluzione.
   C) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   D) **S** ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   B) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.
   C) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   D) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.

2) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.
   B) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1 y_2 y_3 = 0$.
   C) insieme delle successioni reali non decrescenti.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.

3) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.
   B) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.
   D) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   C) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.
   C) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   D) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.

6) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.
   C) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.

7) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
   B) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.
   C) se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   D) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.
   B) $V$ ammette almeno una base ortogonale.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
   D) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.
   D) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

3) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x, y) = (x, y)$, $r(x, y) = (x, -y)$, $s(x, y) = (-x, y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
   A) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.
   B) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.
   C) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.
   D) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.
   B) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   C) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.
   D) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.

6) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   B) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   C) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.
   D) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.

7) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.
   B) $A = B$.
   C) $\det A = \det B$.
   D) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

8) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.
   B) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   C) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.
   D) $\dim ImT = n - \rho(A)$.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   B) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   B) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.
   C) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   C) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.

4) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.
   B) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.
   D) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   C) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

6) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.
   B) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.
   C) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   D) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.

7) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v\rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v\rangle \geq 0$.
   C) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   D) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.

8) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x, y) = (x, y)$, $r(x, y) = (x, -y)$, $s(x, y) = (-x, y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
   A) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.
   B) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.
   C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.
   D) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.

9) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   B) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.
   C) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.
   D) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
   C) $V$ ammette almeno una base ortogonale.
   D) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.

3) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.
   B) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
   C) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   D) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.

4) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.
   B) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1 y_2 y_3 = 0$.
   B) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.
   C) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.
   D) insieme delle successioni reali non decrescenti.

6) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.
   B) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.
   C) $A = B$.
   D) $\det A = \det B$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   B) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.

8) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImT = n - \rho(A)$.
   B) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.
   C) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   D) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.
   B) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.
   D) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.
   B) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.
   C) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.
   D) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.
   B) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   C) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
   D) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.
   B) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
   D) $V$ ammette almeno una base ortogonale.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   B) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.
   B) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.
   C) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.

7) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x, y) = (x, y)$, $r(x, y) = (x, -y)$, $s(x, y) = (-x, y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
   A) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.
   B) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.
   C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.
   D) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.

8) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.
   B) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.
   C) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   D) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.

9) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.
   B) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.
   C) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   B) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.
   C) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
   D) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.

2) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.
   B) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.
   C) $\det A = \det B$.
   D) $A = B$.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.
   D) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.

4) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.
   B) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1 y_2 y_3 = 0$.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.
   D) insieme delle successioni reali non decrescenti.

5) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.
   C) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.

7) Sia **S** un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad **S** è uno spazio vettoriale.
   B) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora **S** ammette una ed una sola soluzione.
   C) **S** ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.
   D) $\rho(C) \geq \rho(A)$.

8) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim ImT = n - \rho(A)$.
   B) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.
   C) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.
   D) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.
   D) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.
   B) insieme delle successioni reali non decrescenti.
   C) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.
   D) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1 y_2 y_3 = 0$.

2) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   B) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.
   C) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.
   D) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   D) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.

4) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.
   B) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.
   C) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
   D) se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è linearmente indipendente.

5) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
   B) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   C) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   D) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.
B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.
D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
B) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
D) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.

9) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora

A) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
B) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
C) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.
D) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
   C) $V$ ammette almeno una base ortogonale.
   D) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.

3) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.
   B) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.
   C) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   D) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.

4) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x, y) = (x, y)$, $r(x, y) = (x, -y)$, $s(x, y) = (-x, y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
   A) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.
   B) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.
   C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.
   D) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.

5) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.
   B) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   C) $\dim ImT = n - \rho(A)$.
   D) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.

6) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.
   B) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.
   C) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.
   B) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.
   D) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.
   B) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   C) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   D) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

9) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \det B$.
   B) $A = B$.
   C) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.
   D) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.
   B) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   C) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.
   D) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   B) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.
   C) $V$ ammette almeno una base ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   D) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.
   B) se il punto $P$ ha coordinate $(4,5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8,3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32,15)$.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10,5)$ e il punto di coordinate $(5,10)$ è 5.
   D) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.

6) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
   B) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.
   C) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.
   D) se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è linearmente indipendente.

7) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   B) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.
   D) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.

8) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   B) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
   C) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.
   D) $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.

9) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle successioni reali non decrescenti.
   B) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.
   C) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1 y_2 y_3 = 0$.
   D) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x,y) = (x,y)$, $r(x,y) = (x,-y)$, $s(x,y) = (-x,y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
   A) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.
   B) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.
   C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.
   D) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.

2) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \det B$.
   B) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.
   C) $A = B$.
   D) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.
   B) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.
   D) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.

4) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.
   B) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.
   B) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   C) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   D) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

6) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.
   B) $\dim ImT = n - \rho(A)$.
   C) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   D) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.
   B) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   C) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.
   B) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   B) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.
   C) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.

4) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   B) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.
   C) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
   D) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.

6) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x,y) = (x,y)$, $r(x,y) = (x,-y)$, $s(x,y) = (-x,y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
   A) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.
   B) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.
   C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.
   D) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.

7) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   B) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.
   C) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.
   D) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.

8) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.
   B) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.
   D) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   B) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.
   C) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.
   D) $\dim ImT = n - \rho(A)$.

2) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   C) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.
   D) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.

3) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A = B$.
   B) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.
   C) $\det A = \det B$.
   D) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   B) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.
   C) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.
   B) insieme delle successioni reali non decrescenti.
   C) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1 y_2 y_3 = 0$.
   D) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.

6) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
   B) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   C) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.
   D) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
   B) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.
   C) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   D) $V$ ammette almeno una base ortogonale.

8) Sia **S** un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   B) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora **S** ammette una ed una sola soluzione.
   C) **S** ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.
   D) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad **S** è uno spazio vettoriale.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.
   B) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.
   C) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   D) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.

2) Sia **S** un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se **S** ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   B) se $y$ è soluzione di **S** allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad **S**.
   C) se le equazioni di **S** non sono linearmente indipendenti allora **S** ammette necessariamente infinite soluzioni.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.
   B) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.
   D) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.

5) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
   B) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   C) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.
   D) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.
   B) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   C) $V$ ammette almeno una base ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.

7) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x, y) = (x, y)$, $r(x, y) = (x, -y)$, $s(x, y) = (-x, y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
   A) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.
   B) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.
   C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.
   D) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.

8) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.
   B) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.

9) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.
   B) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.
   D) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.
   B) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   C) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   D) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.

2) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.
   B) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   C) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1y_2y_3 = 0$.
   B) insieme delle successioni reali non decrescenti.
   C) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   D) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.
   B) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   C) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   D) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

6) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.
   B) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   C) $\dim ImT = n - \rho(A)$.
   D) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   C) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.

9) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det A = \det B$.
   B) $A = B$.
   C) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.
   D) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   B) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

2) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
   B) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   C) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.
   D) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   C) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

4) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.
   C) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.
   B) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.
   D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.

7) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   B) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.
   C) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
   D) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.

8) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.
   B) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1y_2y_3 = 0$.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.
   D) insieme delle successioni reali non decrescenti.

9) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.
   B) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.
   C) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   D) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   B) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   C) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.
   D) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.

2) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x,y) = (x,y)$, $r(x,y) = (x,-y)$, $s(x,y) = (-x,y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
   A) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.
   B) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.
   C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.
   D) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.

3) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   B) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.
   C) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.
   D) $\dim ImT = n - \rho(A)$.

4) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   B) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.
   C) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.
   D) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
   C) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.
   D) $V$ ammette almeno una base ortogonale.

7) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A = B$.
   B) $\det A = \det B$.
   C) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.
   D) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.
   B) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   C) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.
   C) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.
   B) se $v, w \in V$ allora $\langle v, w \rangle \geq 0$.
   C) $V$ ammette almeno una base ortogonale.
   D) se i vettori $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortogonali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.

2) Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due trasformazioni lineari fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T \circ S$ è una trasformazione lineare.
   B) $\dim Im(T \circ S) \leq \dim ImT$.
   C) $\dim \ker(T \circ S) \geq \dim \ker S$.
   D) se $\dim T(S(U)) = \dim W$ allora $S$ e $T$ sono entrambe isomorfismi.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite e sia $x$ una sua soluzione. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ non sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette necessariamente infinite soluzioni.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
   C) se $y$ è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y - x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   B) se il punto $P$ ha coordinate $(4, 5)$ e il punto $Q$ ha coordinate $(-8, 3)$, il punto medio del segmento di estremi $P$ e $Q$ ha coordinate $(-32, 15)$.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 5)$ e il punto di coordinate $(5, 10)$ è 5.
   D) la conica di equazione $x^2 - 3y^2 = 1$ è un'iperbole.

5) Si considerino le seguenti operazioni binarie sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: $x * y = x^2 - y^2$ e l'usuale somma $+$. Allora
   A) $(\mathbf{R}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{R}, +, *)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{R}, +)$ è un campo.
   D) $(\mathbf{R}, *)$ è un gruppo.

6) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\det({}^tA \cdot C \cdot {}^tB) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
B) $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
C) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
D) se $\det(A \cdot B \cdot C) = 0$ allora $\det(A \cdot B^3 \cdot C^5) = 0$.

7) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
A) insieme dei polinomi a coefficienti reali con tutti i coefficienti di grado pari nulli.
B) insieme delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = f(x + 2\pi)$ per ogni $x$.
C) insieme delle successioni reali non decrescenti.
D) insieme delle terne di numeri reali $(y_1, y_2, y_3)$ con $y_1 y_2 y_3 = 0$.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.
B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $z$.

9) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice di $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se $B$ è la matrice di $T$ rispetto ad una base di $V$ allora $B$ è simile ad $A$.
B) $T$ ammette necessariamente almeno un autovalore.
C) se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
D) il polinomio caratteristico di $T$ ha grado $n$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo $n$ denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   B) l'unico vettore di $V$ ortogonale a tutti gli altri è il vettore nullo.
   C) se $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono a due a due ortonormali allora $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $V$.
   D) per $u, v \in V$ si ha $|\langle u, v \rangle| > \|u\| \cdot \|v\|$.

2) Siano $A$, $B$ e $C$ tre matrici reali $n \times n$ regolari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC)^{-1} = {}^t(A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1})$.
   B) $\det(A \cdot B^2 \cdot C^4) = 8 \det A \det B \det C$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) la matrice $C \cdot B^3 \cdot A$ è regolare.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali?
   A) insieme delle matrici reali $2 \times 2$ con determinante nullo.
   B) insieme delle quintuple di numeri reali $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado strettamente superiore al quarto.
   D) insieme delle successioni reali che hanno il terzo termine nullo.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle $x$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle $z$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle $y$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle $y$.

5) Sia **S** un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite. Indichiamo con $A$ e $C$ la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   B) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad **S** è uno spazio vettoriale.
   C) se le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora **S** ammette una ed una sola soluzione.
   D) **S** ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche il sistema lineare omogeneo associato.

6) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e sia $A$ la matrice associata a $T$ rispetto ad una base fissata di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo.
B) $\dim ImT = n - \rho(A)$.
C) $T \circ T$ è iniettivo se e solo se $T$ è iniettivo.
D) $\det A = 0$ se e solo se $\ker T$ non contiene solo il vettore nullo.

7) Sia $T$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale $V$ di dimensione finita $n > 0$ e siano $A, B$ due matrici di $T$ rispetto a due basi fissate di $V$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $A = B$.
B) gli autovalori di $T$ sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico.
C) se $v$ è un autovettore di $T$ allora è anche un autovettore di $T + T^2 + T^3$.
D) $\det A = \det B$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 0$ e $10x + 5y = 0$ sono fra loro ortogonali.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 3)$ e il punto di coordinate $(-2, 0)$ è 5.
C) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
D) la distanza fra il punto di coordinate $(3, 4)$ e la retta di equazione $x - y = 0$ è $\sqrt{2}/2$.

9) Si considerino le applicazioni $Id$, $r$, $s$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ così definite: $Id(x, y) = (x, y)$, $r(x, y) = (x, -y)$, $s(x, y) = (-x, y)$ . Sia $\circ$ l'usuale composizione di applicazioni. Allora
A) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un campo.
B) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un anello.
C) $(\{Id, r\}, \circ)$ è un gruppo.
D) $(\{Id, r, s\}, \circ)$ è un gruppo.