Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F c) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

V F d) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V F c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F b) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V F c) Il rango è un'applicazione lineare.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ in $(0, 0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V F c) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

V F d) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

V F b) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V F c) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

V F d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

V F b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

V F d) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $x+y+z+1=0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

V F b) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F b) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

V F c) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

V F b) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

V F c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

V F b) Ogni gruppo è commutativo.

V F c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

V F d) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1 - z)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

V F b) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

V F c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F c) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x+y+z=1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V F d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V F b) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F c) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ in $(0,0,0)$.

V F b) Il rango è un'applicazione lineare.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V F d) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x+y+z+7=0$ e $2x-y-z-5=0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v}-\mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F b) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il piano di equazione cartesiana $x+y+z+1=0$ e la retta di equazione parametrica $x=2t$, $y=2t$, $z=2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V **F** c) L'equazione cartesiana $x^2+2y^2=1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

V **F** d) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

V **F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z) = (x,y,1-z)$ per ogni (x,y,z) è lineare.

V **F** c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V **F** d) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

V **F** b) Ogni gruppo è commutativo.

V **F** c) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1,3,5,7,9\}$ ha cardinalità 32.

V **F** d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

V **F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V **F** c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

V **F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V **F** b) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

V **F** c) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V **F** d) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V **F** b) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

V **F** c) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

V **F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

V **F** b) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

V **F** d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** d) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

V **F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

V **F** d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

V F d) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

V F c) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

V F d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F b) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

V F d) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V F b) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

V F c) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ in $(0, 0, 0)$.

V F d) Il rango è un'applicazione lineare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F d) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F c) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V F b) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

V F d) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il piano di equazione cartesiana $x + y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V F b) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

V F b) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

V F c) Ogni gruppo è commutativo.

V F d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V F b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F b) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

V F c) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v}-\mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x+y+z+7=0$ e $2x-y-z-5=0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

V F d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

V F b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

V F c) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F b) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z) = (x,y,1-z)$ per ogni (x,y,z) è lineare.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$.

V F b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

V F b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

V F c) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V F b) Il rango è un'applicazione lineare.

V F c) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ in $(0,0,0)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni gruppo è commutativo.

V F b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

V F c) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

V F d) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F d) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F d) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F c) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

V F d) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1 - z)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

V F d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

V F b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

V F d) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F c) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F d) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $x + y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

V F d) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F b) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

V F d) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

V F b) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

V F d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

V **F** d) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V **F** b) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

V **F** c) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

V **F** d) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il piano di equazione cartesiana $x+y+z+1=0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

V **F** c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V **F** d) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ in $(0,0,0)$.

V **F** b) Il rango è un'applicazione lineare.

V **F** c) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

V **F** d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V **F** b) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

V **F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V **F** d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

V F c) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

V F d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F b) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F c) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

V F d) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

V F b) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

V F d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

V F b) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

V F b) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

V F c) Ogni gruppo è commutativo.

V F d) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

V F c) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F b) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1 - z)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

V F b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F b) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

V F c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ in $(0,0,0)$.

V F b) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V F d) Il rango è un'applicazione lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V F d) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

V F c) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V **F** c) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

V **F** d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V **F** b) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

V **F** c) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** d) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

V **F** c) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

V **F** c) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V **F** d) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

V **F** b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

V **F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

V **F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

V **F** d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V **F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

V **F** c) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

V **F** d) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

V **F** b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

V **F** d) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni gruppo è commutativo.

V F b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

V F c) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

V F d) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F b) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

V F c) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F d) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F b) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1 - z)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

V F b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

V F c) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il piano di equazione cartesiana $x + y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

V F c) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

V **F** b) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

V **F** c) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

V **F** d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango è un'applicazione lineare.

V **F** b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ in $(0,0,0)$.

V **F** c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V **F** d) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

V **F** b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V **F** c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V **F** d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

V **F** b) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

V **F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

V **F** d) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

V F b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

V F d) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $x + y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

V F d) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

V F b) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

V F d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

V F b) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

V F c) Ogni gruppo è commutativo.

V F d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

V F d) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

V F b) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F c) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

V F d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F c) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V F d) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

V F c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1 - z)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F d) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V F c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V F b) Il rango è un'applicazione lineare.

V F c) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ in $(0,0,0)$.

V F d) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v}-\mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x+y+z+7=0$ e $2x-y-z-5=0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V **F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

V **F** c) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

V **F** b) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

V **F** c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

V **F** d) Ogni gruppo è commutativo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

V **F** d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

V **F** c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

V **F** d) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V **F** b) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** c) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

V **F** b) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

V **F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V **F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V **F** b) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V **F** c) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

V **F** b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V **F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1 - z)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V **F** d) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

V F b) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

V F b) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

V F c) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F c) Il piano di equazione cartesiana $x + y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F b) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

V F c) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F d) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V **F** b) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

V **F** c) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

V **F** d) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il piano di equazione cartesiana $x+y+z+1=0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V **F** c) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

V **F** d) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

V **F** d) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V **F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

V **F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V **F** d) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V **F** b) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

V **F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

V **F** d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F b) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F c) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

V F d) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

V F b) Il rango è un'applicazione lineare.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ in $(0, 0, 0)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

V F c) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

V F d) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

V F b) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

V F c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

V F d) Ogni gruppo è commutativo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

V F c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

V F d) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

V F d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F c) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1 - z)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F b) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

V F d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V **F** b) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

V **F** c) Il rango è un'applicazione lineare.

V **F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ in $(0, 0, 0)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V **F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V **F** c) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

V **F** d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

V **F** c) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** d) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V **F** c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V **F** c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

V **F** d) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

V F b) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

V F c) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

V F c) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F d) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

V F d) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

V F b) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

V F c) Ogni gruppo è commutativo.

V F d) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

V F c) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

V F c) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

V F d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1 - z)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F d) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

V F d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F b) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

V F c) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

V F d) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il piano di equazione cartesiana $x + y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V F c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F c) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

V F d) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

V F b) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

V F c) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni gruppo è commutativo.

V F b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

V F c) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

V F d) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F b) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

V F c) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F d) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il piano di equazione cartesiana $x+y+z+1=0$ e la retta di equazione parametrica $x=2t$, $y=2t$, $z=2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F c) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$.

V F b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

V F c) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

V F b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V F b) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

V F c) Il rango è un'applicazione lineare.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ in $(0,0,0)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F b) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

V F d) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

V F c) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

V F d) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V F b) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

V F b) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V F c) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v}-\mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F b) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x+y+z+7=0$ e $2x-y-z-5=0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1-z)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

V F c) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

V F d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

V **F** b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V **F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è ortogonale.

V **F** d) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango è un'applicazione lineare.

V **F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

V **F** c) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

V **F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che mandi $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ in $(0,0,0)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili tra loro.

V **F** b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim W$.

V **F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V **F** d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di $\mathbb{R}^3$ contengono tre parametri.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è dato da tre punti di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ha cardinalità 32.

V **F** b) Ogni gruppo è commutativo.

V **F** c) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

V **F** d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $xy = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni sistema di generatori contiene almeno n vettori.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

V **F** b) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

V **F** c) Se A è una matrice quadrata reale e A^2 è diagonale allora anche A è diagonale.

V **F** d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = A^2$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

V **F** b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V **F** c) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{E}^n$ a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è positivo se e solo se A è invertibile.

V **F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga con tutti gli elementi uguali a 1, allora $\det A = 0$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V **F** d) La matrice nulla 2×2 è l'unica matrice reale 2×2 con traccia e determinante nulli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

V **F** b) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

V **F** c) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale λ è 1, allora anche la molteplicità geometrica di λ è 1.

V **F** d) Ogni endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V ammette una base fatta di autovettori di f.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

V **F** b) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ hanno cardinalità n.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, AB ha traccia nulla.

V **F** b) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

V **F** c) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il prodotto scalare standard fra due vettori $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è dato da $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

V **F** b) La funzione nulla da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V **F** c) Esistono esattamente 2 matrici ortogonali 2×2.

V **F** d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1 - z)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W.

V F c) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale V non dipende dalla base scelta su V.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con V.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

V F c) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

V F d) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) < n$.

V F b) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è 1.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti positivi è sempre positivo.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(-A) = -\det A$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

V F b) L'equazione cartesiana $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta un'iperbole del piano reale.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) Il piano di equazione cartesiana $x + y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due insiemi, $A = (A \setminus B) \cup B$.

V F b) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F c) L'insieme dei polinomi reali in x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.