16 Febbraio 2015 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali invertibili A tali che $\left(A^{-1}\right)^{-1} \neq A$.

V F b) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

V F d) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V F c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F d) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V F d) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8 A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

16 Febbraio 2015 N. di Matricola: 00110

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

V F b) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F b) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F c) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

V F d) La retta di equazione parametrica $x = 2t + 1, y = 2t, z = 2t - 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

V F c) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

V F b) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

V F c) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V F d) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

V F c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1B_3} = M_{B_2B_3} \cdot M_{B_1B_2}$.

V F b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

V F c) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F c) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

V F d) Il prodotto fra matrici è commutativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F b) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F c) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

16 Febbraio 2015 N. di Matricola: 00111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F d) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

V F c) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

V F b) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

V F c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F d) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

V F b) Esistono matrici reali invertibili A tali che $(A^{-1})^{-1} \neq A$.

V F c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t + 1, y = 2t, z = 2t - 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

V F b) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

V F b) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

V F d) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1B_3} = M_{B_2B_3} \cdot M_{B_1B_2}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

V F c) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F c) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

V F c) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto fra matrici è commutativo.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F c) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F d) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

V F b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

V F b) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V F c) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(0,0)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

V F d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto fra matrici è commutativo.

V F b) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F d) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F d) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F c) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F d) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F c) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F b) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

16 Febbraio 2015 N. di Matricola: 01010

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

V **F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

V **F** c) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V **F** d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

V **F** b) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V **F** b) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

V **F** d) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V **F** b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V **F** c) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

V **F** d) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = 2t + 1, y = 2t, z = 2t - 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

V F c) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V F d) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

V F c) Esistono matrici reali invertibili A tali che $\left(A^{-1}\right)^{-1} \neq A$.

V F d) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

V F b) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1 B_3} = M_{B_2 B_3} \cdot M_{B_1 B_2}$.

V F c) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

V **F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V **F** b) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

V **F** c) Il prodotto fra matrici è commutativo.

V **F** d) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V **F** b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V **F** d) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

V **F** b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

V **F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V **F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t+1, y = 2t, z = 2t-1$ e il piano di equazione cartesiana $x+y+z-1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F c) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F d) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F d) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

V F b) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F c) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F d) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F b) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

V F c) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

V F d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1B_3} = M_{B_2B_3} \cdot M_{B_1B_2}$.

V F b) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

V F b) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8 A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V F c) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F b) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali invertibili A tali che $(A^{-1})^{-1} \neq A$.

V F b) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F c) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F d) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

V F d) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

V F b) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V F c) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

V F d) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

V F b) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F b) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

V F d) Esistono matrici reali invertibili A tali che $(A^{-1})^{-1} \neq A$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F d) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di Imf.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V F b) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F b) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

16 Febbraio 2015 N. di Matricola: 01110

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.
V **F** b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.
V **F** c) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.
V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.
V **F** b) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.
V **F** c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.
V **F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V **F** c) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.
V **F** d) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V **F** b) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.
V **F** c) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.
V **F** d) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.
V **F** b) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.
V **F** c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.
V **F** d) Il prodotto fra matrici è commutativo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

V F b) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

V F b) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1 B_3} = M_{B_2 B_3} \cdot M_{B_1 B_2}$.

V F c) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

V F c) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V F d) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

V F b) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) La retta di equazione parametrica $x = 2t + 1, y = 2t, z = 2t - 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V F d) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

V F b) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

V F c) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V **F** c) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

V **F** d) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La retta di equazione parametrica $x = 2t+1, y = 2t, z = 2t-1$ e il piano di equazione cartesiana $x+y+z-1=0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

V **F** c) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V **F** d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V **F** d) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V **F** b) $\{(1,0,-1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V **F** d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x+y+z=0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

V **F** b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

V **F** c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V **F** d) Esistono matrici reali invertibili A tali che $(A^{-1})^{-1} \neq A$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

V F b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

V F b) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F b) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

V F c) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F d) Il prodotto fra matrici è commutativo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

V F d) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8 A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F d) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

V F b) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1 B_3} = M_{B_2 B_3} \cdot M_{B_1 B_2}$.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

V F d) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(0,0)$.

V F c) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

V F d) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F b) Il prodotto fra matrici è commutativo.

V F c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F d) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

V F b) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

V F c) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V F b) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

V F c) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

V F d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

V F b) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8 A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F b) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

V F b) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

V F b) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

V **F** c) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

V **F** d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

V **F** b) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V **F** c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V **F** d) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\{(1,0,-1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V **F** c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V **F** d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x+y+z=0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V **F** d) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

V **F** b) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V **F** c) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

V **F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(0,0)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

V F b) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

V F c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F d) Esistono matrici reali invertibili A tali che $\left(A^{-1}\right)^{-1} \neq A$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t + 1, y = 2t, z = 2t - 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

V F b) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

V F d) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1B_3} = M_{B_2B_3} \cdot M_{B_1B_2}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F c) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V **F** b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** c) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V **F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

V **F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

V **F** c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V **F** d) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

V **F** b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

V **F** c) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

V **F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V **F** b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V **F** c) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

V **F** d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

V **F** b) La retta di equazione parametrica $x = 2t + 1, y = 2t, z = 2t - 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V **F** d) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V F c) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto fra matrici è commutativo.

V F b) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F c) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V F c) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

V F b) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

V F b) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F c) Esistono matrici reali invertibili A tali che $(A^{-1})^{-1} \neq A$.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

V F b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

V F c) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F d) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1 B_3} = M_{B_2 B_3} \cdot M_{B_1 B_2}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

V F b) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

V F c) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(0,0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F c) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F b) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

V F c) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8 A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F d) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v}-\mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F b) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

V F d) Esistono matrici reali invertibili A tali che $\left(A^{-1}\right)^{-1} \neq A$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n\times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V F d) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V F b) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F b) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V F c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V F d) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

V F c) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(0,0)$.

V F c) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

V F d) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

V F b) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F b) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

V F d) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = 2t + 1, y = 2t, z = 2t - 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F b) Il prodotto fra matrici è commutativo.

V F c) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

V F c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F d) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

V F c) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F b) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1B_3} = M_{B_2B_3} \cdot M_{B_1B_2}$.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F c) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F d) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t + 1, y = 2t, z = 2t - 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V **F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V **F** d) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

V **F** b) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

V **F** c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V **F** d) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

V **F** b) $\{(1,0,-1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

V **F** b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

V **F** c) Esistono matrici reali invertibili A tali che $(A^{-1})^{-1} \neq A$.

V **F** d) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

V **F** c) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

V **F** d) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

V **F** b) Il prodotto fra matrici è commutativo.

V **F** c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V **F** d) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V **F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

V **F** d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

V F b) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

V F d) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1 B_3} = M_{B_2 B_3} \cdot M_{B_1 B_2}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

V F b) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V F c) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^t A)^8 A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F c) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V F d) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

V F d) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8 A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

V F c) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F d) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

V F b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F b) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

V F c) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F d) Il prodotto fra matrici è commutativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F d) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V **F** b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V **F** b) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

V **F** c) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V **F** b) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

V **F** c) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

V **F** d) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V **F** b) Esistono matrici reali invertibili A tali che $(A^{-1})^{-1} \neq A$.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

V **F** d) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

V **F** b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V **F** d) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

V F b) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

V F c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

V F d) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

V F b) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F c) La retta di equazione parametrica $x = 2t + 1, y = 2t, z = 2t - 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

V F c) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1 B_3} = M_{B_2 B_3} \cdot M_{B_1 B_2}$.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è un isomorfismo.

V F c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F d) Due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico sono sempre fra loro simili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per colonne.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F d) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettive.

V F b) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di Imf.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×4 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 8 sono fra loro isomorfi.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = 2t + 1, y = 2t, z = 2t - 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) L'equazione cartesiana $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta un'ellisse del piano reale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è un insieme di cardinalità m e B è un insieme di cardinalità n, $A \times B$ è un insieme di cardinalità $m \cdot n$.

V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono iniettive e suriettive.

V F c) L'insieme dei numeri reali positivi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 3 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$ ha una e una sola base canonica.

V F c) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

V F d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F c) Il prodotto fra matrici è commutativo.

V F d) Una matrice reale A è antisimmetrica se e solo se $A = -A$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o -1.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F c) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ ammette esattamente una base ortonormale.

V F d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su $\mathbb{R}^2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A = 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è nullo se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F d) Se A è una matrice reale quadrata invertibile, allora $\det(A^{2000}) > 0$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori fa n.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale non può mai essere nulla.

V **F** d) Ogni matrice reale $n \times n$ con n dispari possiede almeno un autovalore reale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\{(1,0,-1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x+y+z=0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se A^2 è invertibile.

V **F** b) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V **F** c) Esistono matrici reali invertibili A tali che $\left(A^{-1}\right)^{-1} \neq A$.

V **F** d) Se A è una matrice reale $m \times n$, $0 \cdot A$ è la matrice $m \times n$ nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$.

V **F** b) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V **F** c) Due vettori in uno spazio vettoriale euclideo sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

V **F** d) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Allora $({}^tA)^8 A^8$ è la matrice identica $n \times n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B, C tre matrici reali $n \times n$. Se A è simile sia a B che a C, allora B è simile a C.

V F b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.

V F c) Siano B_1, B_2 e B_3 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{B_1B_3} = M_{B_2B_3} \cdot M_{B_1B_2}$.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \mathrm{Im} f = n - r(A)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale. Allora $3A$ ha lo stesso rango di A.

V F b) Esistono sistemi lineari reali che hanno un numero finito di soluzioni strettamente maggiore di 1.

V F c) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

V F d) Se due matrici reali 2×2 hanno stesso rango e stessa traccia coincidono.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = A^1_j \cdot A^2_j \cdot \ldots \cdot A^n_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F b) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore di determinante non nullo.

V F c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è $(-1)^n$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante uguale a 1 è finito.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $x + y + z - 5 = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) In $\mathbb{R}^3$ esistono coppie di rette che non sono complanari.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F d) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0, 4x + 2y - 10z + 4 = 0$ rappresenta una retta di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è suriettiva.

V F c) Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è invertibile, $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

V F d) Se due insiemi sono infiniti allora sono fra loro equipotenti.