

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.
V F b) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
V F c) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F d) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.
V F b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
V F c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
V F d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.
V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.
V F d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.
- V F** b) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
- V F** c) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.
- V F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.
- V F** b) Sia $A = (a_{ij}^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.
- V F** c) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.
- V F** b) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
- V F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
- V F** d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + 2y + 3z + 7 = 0$ e $x - 2y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.
- V F** d) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .
- V F** c) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
- V F** d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.
- V F** b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
- V F** c) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.
- V F** d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .
- V F** b) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .
- V F** c) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .
- V F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.
- V F** b) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.
- V F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** d) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.
- V F** c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.
- V F** d) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- V F** d) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono trasformazioni lineari $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.
- V F** b) L'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f: V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** d) Se $f: V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^t A$.
- V F** b) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.
- V F** c) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^t A {}^t B$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.
- V F** b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.
V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
V F d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.
V F c) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.
V F b) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.
V F c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.
V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.
V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
V F c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.
V F d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.
- V F** b) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.
- V F** c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
- V F** d) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.
- V F** b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.
- V F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
- V F** b) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .
- V F** c) La funzione $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .
- V F** d) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.
- V F** c) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.
- V F** d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** b) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.
- V F** c) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
V F b) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.
V F c) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .
V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.
V F b) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .
V F b) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
V F c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .
V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
- V F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
- V F** c) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.
- V F** d) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$.
- V F** b) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.
- V F** c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.
- V F** d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.
- V F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.
- V F** c) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.
- V F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** c) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.
- V F** d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.
V F b) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.
V F d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$.
V F b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.
V F c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.
V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
V F b) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.
V F c) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.
V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.
V F c) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.
V F d) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.
- V F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** d) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.
- V F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.
- V F** c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.
- V F** d) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.
- V F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.
- V F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
V F c) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
V F d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .
V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.
V F c) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
V F b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
V F b) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F c) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.
V F d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
- V F** c) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .
- V F** d) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
- V F** d) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.
- V F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.
- V F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** d) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
- V F** b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
- V F** c) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.
- V F** d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.
- V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** d) Se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.
- V F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.
- V F** c) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.
- V F** d) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.
- V F** b) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$.
- V F** d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.
- V F** c) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.
- V F** d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
- V F** b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.
- V F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.
- V F** c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
- V F** d) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- V F** c) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.
- V F** d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.
- V F** b) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.
- V F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.
- V F** b) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.
- V F** c) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
- V F** b) La funzione $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .
- V F** c) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .
- V F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono trasformazioni lineari $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.
V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f: V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F c) Se $f: V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .
V F d) L'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
V F b) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
V F c) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.
V F d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.
V F b) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
V F d) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.
V F b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F d) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.
V F b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
V F c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.
V F d) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
V F c) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.
V F d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.
V F b) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
V F c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .
V F d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.
V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F c) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.
V F d) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .
V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.
V F c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
V F d) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
V F b) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.
V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
V F d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.
V F d) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.
V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.
V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.
V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.
- V F** d) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.
- V F** b) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.
- V F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.
- V F** d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
- V F** b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** d) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
- V F** b) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.
- V F** c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .
- V F** b) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .
- V F** c) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .
- V F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.
- V F** b) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.
- V F** d) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- V F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** d) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
V F b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.
V F c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .
V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.
V F c) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.
V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f: V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F d) Se $f: V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.
V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.
V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F d) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.
V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
V F c) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.
V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.
V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F d) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.
V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.
V F c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.
V F d) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.
V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
V F c) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
V F d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.
V F c) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
V F d) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
- V F** b) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .
- V F** c) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .
- V F** d) La funzione $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.
- V F** c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
- V F** d) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** c) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
- V F** d) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.
- V F** b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.
- V F** b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
- V F** c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
- V F** d) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.
- V F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.
- V F** c) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .
- V F** b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.
- V F** c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .
- V F** d) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.
- V F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.
- V F** b) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
- V F** c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^t A$.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^t A {}^t B$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- V F** c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
- V F** b) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.
- V F** c) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.
- V F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.
- V F** c) Se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .
- V F** d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.
- V F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.
- V F** c) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.
- V F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.
- V F** d) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^t A$.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^t A {}^t B$.
V F c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.
V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.
V F b) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.
V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F c) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.
V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.
V F c) Sia $A = (a_{ij}^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.
V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.
- V F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.
- V F** d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
- V F** b) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
- V F** c) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.
- V F** d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.
- V F** b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.
- V F** c) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
V F b) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .
V F c) La funzione $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .
V F d) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
V F c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.
V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F b) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.
V F c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
V F c) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
V F d) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.
V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F c) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.
V F d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.
V F c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
V F d) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
V F c) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.
V F d) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .
V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .
V F b) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
V F c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .
V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.
- V F** c) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.
- V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
- V F** c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.
- V F** d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
- V F** b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.
- V F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
- V F** c) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .
- V F** d) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.
- V F** d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_{ij}^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.
- V F** b) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.
- V F** c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.
- V F** d) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.
- V F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- V F** d) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.
- V F** b) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.
- V F** d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$.
- V F** b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.
- V F** c) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
- V F** d) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** b) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
- V F** c) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .
- V F** c) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.
- V F** b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
- V F** c) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.
- V F** d) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.
- V F** b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .
- V F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.
- V F** b) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.
- V F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** c) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.
- V F** b) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.
- V F** c) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
- V F** d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.
- V F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
- V F** c) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
- V F** d) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
- V F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
- V F** c) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.
- V F** d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
- V F** b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.
- V F** c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
- V F** d) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.
- V F** b) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .
V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
V F c) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F d) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
V F b) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.
V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.
V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.
V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.
V F b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.
V F c) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.
- V F** c) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.
- V F** d) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.
- V F** c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- V F** d) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.
- V F** c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .
- V F** d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.
- V F** d) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$.
V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
V F d) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F b) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.
V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.
V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
V F d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.
V F c) Se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .
V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
V F c) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .
V F d) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.
- V F** c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.
- V F** d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.
- V F** c) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.
- V F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
- V F** b) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .
- V F** c) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .
- V F** d) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.
- V F** c) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.
- V F** d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.

V F c) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

V F d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F b) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F c) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.

V F d) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.

V F b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F c) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.

V F d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.
V F b) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.
V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.
V F d) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
V F b) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.
V F c) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$.
V F c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.
V F d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .
V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .
- V F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.
- V F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** c) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.
- V F** d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
- V F** b) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.
- V F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
- V F** d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.
- V F** d) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .
- V F** b) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.
- V F** c) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.
- V F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_{ij}^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.
- V F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.
- V F** c) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- V F** c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
- V F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
- V F** c) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.
- V F** d) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.
- V F** c) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.
- V F** d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.
- V F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.
- V F** c) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.
- V F** b) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
- V F** c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
- V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.
- V F** c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.
- V F** d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F d) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
V F b) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.
V F c) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F b) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.
V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.
V F d) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
V F b) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.
V F c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
V F d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .
- V F** b) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .
- V F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
- V F** d) La funzione $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
- V F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
- V F** d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
- V F** b) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .
- V F** c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.
- V F** d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.
- V F** b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f: V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** b) Se $f: V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .
- V F** c) Non esistono trasformazioni lineari $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.
- V F** d) L'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .
V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se λ è un autovalore di f , esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
V F c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.
V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.
V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.
V F d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(2, 3)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.
V F b) Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W .
V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.
V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + 3y, 3)$ per ogni (x, y) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $8x - 4y - 4z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) L'equazione cartesiana $-x^3 + 2y^3 - xy + 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.
V F d) Le rette di \mathbb{R}^3 di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) L'insieme delle matrici ortogonali 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** c) Ogni anello contiene un numero infinito di elementi.
- V F** d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.
- V F** c) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.
- V F** d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^t A$.
- V F** b) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^t A^t B$.
- V F** d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V .
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
- V F** c) La funzione $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (-y, x)$ è una isometria di \mathbb{E}^2 .
- V F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)}^1 \cdot a_{\sigma(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}^n$.
- V F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.
- V F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V , $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità $n + 2$ sono linearmente dipendenti.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.
- V F** b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.
- V F** c) Se A è una matrice reale, allora $2 \cdot A = A + A$.
- V F** d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.
- V F** b) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.
- V F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 9x_1y_1 - x_2y_2$ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
- V F** d) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (4x + y, 0)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettive.
V F d) Se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V , allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.
V F b) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.
V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.
V F d) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.
V F b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice j fra 1 e n .
V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.
V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n^2 .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) La distanza fra il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.
V F c) Esistono rette di \mathbb{R}^3 che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.
V F d) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^3 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 4×4 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F b) Esistono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} iniettive ma non suriettive.
V F c) Dato un qualunque insieme A , si ha che $A \cap (A \cup A) = A \cup (A \cap A)$.
V F d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.