

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
- V F** b) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** c) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
- V F** d) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
- V F** c) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.
- V F** d) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.
- V F** b) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.
- V F** b) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
- V F** c) Il determinante è un'applicazione lineare.
- V F** d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .
- V F** b) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
- V F** c) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.
- V F** d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.

V F b) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.

V F d) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.

V F b) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .

V F d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.

V F b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .

V F c) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .

V F d) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

V F d) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.

V F b) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.

V F b) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.

V F d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.

V F b) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

V F c) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.

V F b) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.
- V F** c) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.
- V F** d) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.
- V F** b) Ogni gruppo finito è commutativo.
- V F** c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
- V F** d) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo P valga per 0 e che tutte le volte che P vale per un numero naturale valga anche per un altro numero naturale. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .
- V F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
- V F** b) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.
- V F** d) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.
- V F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F c) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
V F d) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.
V F b) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.
V F c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
V F d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.
V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.
V F c) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .
V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
V F c) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.
V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
V F b) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^t A$ è simmetrica.
V F c) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.
V F b) Il determinante è un'applicazione lineare.
V F c) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
V F d) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
V F b) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.
V F c) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.
V F d) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.
V F c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.
V F d) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F b) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
V F c) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F d) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** b) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
- V F** c) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
- V F** d) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .
- V F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** d) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.
- V F** b) Ogni gruppo finito è commutativo.
- V F** c) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.
- V F** d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.
- V F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.
- V F** c) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .
- V F** c) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
- V F** d) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.
V F b) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .
V F c) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.
V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.
V F b) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.
V F c) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
V F d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .
V F b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.
V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.
V F d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .
V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.
V F d) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.
V F b) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
V F c) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.
V F d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F b) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
V F c) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.
V F d) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
V F b) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.
V F c) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.
V F d) Il determinante è un'applicazione lineare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .
V F c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.
V F d) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
V F c) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.
V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.
V F b) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.
V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.
V F d) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.
V F b) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F c) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.
V F d) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.
V F b) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.
V F c) Ogni gruppo finito è commutativo.
V F d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .
V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.
V F d) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.
V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.
V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.
V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
V F b) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F b) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
V F c) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
V F d) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
- V F** c) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
- V F** d) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.
- V F** d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.
- V F** b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.
- V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.
- V F** c) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** b) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .
- V F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.
- V F** b) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.
- V F** c) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.
- V F** c) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.
- V F** d) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
- V F** b) Il determinante è un'applicazione lineare.
- V F** c) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.
- V F** d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
- V F** b) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.
- V F** c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .
- V F** d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.
- V F** c) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.
- V F** d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni gruppo finito è commutativo.
- V F** b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
- V F** c) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.
- V F** d) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.
- V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
- V F** d) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .
- V F** b) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.
- V F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.
- V F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
- V F** b) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.
- V F** c) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
- V F** d) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .
V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .
V F b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F c) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.
V F d) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
V F b) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F c) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F d) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
V F b) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.
V F c) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.
V F d) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.
V F b) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
- V F** c) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
- V F** d) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.
- V F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.
- V F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.
- V F** d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.
- V F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.
- V F** d) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .
- V F** b) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.
- V F** d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.
- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.
- V F** c) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .
- V F** d) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** b) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.
- V F** c) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
- V F** d) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.
- V F** b) Il determinante è un'applicazione lineare.
- V F** c) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.
- V F** d) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.
- V F** b) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.
- V F** c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .
- V F** d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.
V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
V F d) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.
V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.
V F c) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .
V F d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F b) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F c) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
V F d) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
V F b) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
V F c) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.
V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.
- V F** b) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
- V F** c) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.
- V F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.
- V F** c) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.
- V F** d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.
- V F** d) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
- V F** b) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.
- V F** c) Ogni gruppo finito è commutativo.
- V F** d) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.
V F b) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
V F c) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.
V F d) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.
V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.
V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.
V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F b) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .
V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.
V F b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.
V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.
V F b) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.
V F c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.
V F b) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.
V F c) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
V F d) Il determinante è un'applicazione lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
V F c) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.
V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .
V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.
V F d) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono trasformazioni lineari $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.
V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f: V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .
V F c) Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
V F d) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
V F b) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.
V F c) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
V F d) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** c) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.
- V F** d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) Se A, B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
- V F** c) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** d) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.
- V F** c) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.
- V F** c) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.
- V F** b) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.
- V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.
- V F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.
- V F** d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.
- V F** c) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.
- V F** d) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.
- V F** c) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
- V F** d) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni gruppo finito è commutativo.
V F b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
V F c) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.
V F d) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F b) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.
V F c) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
V F d) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F b) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .
V F c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .
V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.
V F b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.
V F c) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.
V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.
V F b) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.
V F c) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F d) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
V F b) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.
V F c) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.
V F d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante è un'applicazione lineare.
V F b) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.
V F c) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
V F d) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.
V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.
V F c) Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
V F d) L'immagine di una trasformazione lineare $f: V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.
V F b) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.
V F c) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F b) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .
V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.
V F d) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .
V F b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F c) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.
V F d) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
V F b) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.
V F c) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.
V F d) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .
V F b) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.
V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.
V F d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.
V F b) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.
V F c) Ogni gruppo finito è commutativo.
V F d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
- V F** b) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
- V F** c) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.
- V F** d) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.
- V F** c) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.
- V F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.
- V F** b) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
- V F** b) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** c) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** d) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.
V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.
V F d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
V F c) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
V F d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.
V F c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.
V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F d) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.
V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.
V F c) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.
V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
- V F** b) Il determinante è un'applicazione lineare.
- V F** c) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.
- V F** d) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .
- V F** c) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.
- V F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
- V F** b) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.
- V F** c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.
- V F** d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
- V F** c) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.
- V F** d) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.
- V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.
- V F** c) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.
- V F** b) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.
- V F** c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
- V F** d) Ogni gruppo finito è commutativo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .
- V F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.
- V F** d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.
- V F** b) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
- V F** c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.
- V F** d) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F b) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F c) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
V F d) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.
V F b) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.
V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.
V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
V F b) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
V F c) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
V F b) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .
V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F d) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.
V F b) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.
V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.
V F b) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .
V F c) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.
V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F b) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
V F c) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.
V F d) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
V F b) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .
V F c) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F d) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F b) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .
V F c) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.
V F d) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.
V F b) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
V F c) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.
V F d) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.
V F d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
V F b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.
V F c) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.
V F d) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.
V F b) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .
V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.
V F d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** b) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** c) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
- V F** d) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.
- V F** b) Il determinante è un'applicazione lineare.
- V F** c) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
- V F** d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .
- V F** b) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.
- V F** c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
- V F** d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.
- V F** c) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.
- V F** d) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.
- V F** b) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.
- V F** c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
- V F** d) Ogni gruppo finito è commutativo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.
- V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.
- V F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.
- V F** d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
V F b) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.
V F c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.
V F d) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F b) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .
V F c) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.
V F d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{0_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.
V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .
V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
V F d) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F b) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .
V F c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .
V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
V F c) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.
V F d) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
- V F** b) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.
- V F** c) Il determinante è un'applicazione lineare.
- V F** d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
- V F** b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .
- V F** c) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.
- V F** d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
- V F** b) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.
- V F** c) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.
- V F** d) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.
V F d) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .
V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
V F c) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.
V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F b) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
V F c) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
V F d) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
V F b) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.
V F c) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.
V F d) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.
- V F** b) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .
- V F** c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{0_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
- V F** b) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.
- V F** c) Ogni gruppo finito è commutativo.
- V F** d) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.
- V F** b) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.
- V F** c) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** d) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.
- V F** c) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .
- V F** d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .
- V F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
- V F** d) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.
- V F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.
- V F** d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.
- V F** c) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .
- V F** d) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** b) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.
- V F** c) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
- V F** d) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.
- V F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.
- V F** c) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .
V F c) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.
V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.
V F d) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.
V F b) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .
V F c) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.
V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni gruppo finito è commutativo.
V F b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
V F c) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.
V F d) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F b) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .
V F c) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
V F d) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** b) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
- V F** c) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
- V F** d) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.
- V F** b) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.
- V F** c) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
- V F** d) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
- V F** b) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.
- V F** c) Il determinante è un'applicazione lineare.
- V F** d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F c) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.
V F d) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F b) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
V F c) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
V F d) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F b) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.
V F c) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.
V F d) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
V F b) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.
- V F** b) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
- V F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
- V F** d) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.
- V F** c) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .
- V F** d) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.
- V F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.
- V F** c) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.
- V F** d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** b) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** b) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .
- V F** c) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .
- V F** d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.
V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^4 è un autovalore di A^4 .
V F c) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^5 . La matrice associata a f rispetto a una base spettrale di f è la matrice identica.
V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante è un'applicazione lineare.
V F b) Un sistema lineare reale ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è non nullo.
V F c) Se un sistema lineare reale ha più di una soluzione ne ha infinite.
V F d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^3 che mandano $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le matrici reali $n \times n$ invertibili sono simili alla matrice identica $n \times n$.
V F b) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora $\dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.
V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V .
V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le rappresentazioni parametriche che contengono due parametri rappresentano un piano.
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $-x + y + z + 7 = 0$ e $5x - 5y - 5z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di \mathbb{R}^3 è dato, per definizione, da un qualunque insieme di tre rette di \mathbb{R}^3 a due a due ortogonali.
V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$ è il vettore nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle parti dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ha cardinalità 64.
V F b) Ogni gruppo finito è commutativo.
V F c) Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che P vale per un numero naturale n valga anche per il successivo. Allora P vale per tutti i numeri naturali.
V F d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V con $U \cap W \neq \{\mathbf{0}_V\}$, allora $\dim(U + W) \neq \dim U + \dim W$.
V F c) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $x^2 = y^2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .
V F d) Ogni sistema di generatori dello spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^5 contiene almeno 5 vettori.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale invertibile, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
V F b) L'operazione di prodotto è definita per qualunque coppia di matrici reali.
V F c) Se A è una matrice quadrata reale e A^3 è diagonale allora anche A è diagonale.
V F d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = -A$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\mathbf{v} + 2\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + 2\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
V F c) Ogni insieme linearmente dipendente di almeno due vettori non nulli di \mathbb{E}^n contiene almeno due vettori fra loro non ortogonali.
V F d) Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 ammette un'unica base ortonormale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è negativo se e solo se A non è invertibile.
V F b) Se A è una matrice ortogonale, allora $\det A = 0$.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(ABAB) = (\det A)^2 \cdot (\det B)^2$.
V F d) La matrice identica $n \times n$ è l'unica matrice reale $n \times n$ con determinante uguale a 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Se 1 è l'unico autovalore di f allora f è un automorfismo.
- V F** b) Ogni matrice reale diagonalizzabile è ortogonale.
- V F** c) La molteplicità algebrica di un autovalore reale λ non può mai essere strettamente inferiore alla molteplicità geometrica di λ .
- V F** d) Ogni matrice reale 3×3 è diagonalizzabile per similitudine.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio non finitamente generato è non finitamente generato.
- V F** b) Tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n di cardinalità n sono linearmente indipendenti.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 di equazione $x = 2$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1, AB ha traccia uguale a 1.
- V F** b) Se due matrici hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, allora hanno anche lo stesso rango.
- V F** c) Se A è una matrice reale quadrata, allora $A + {}^tA$ è simmetrica.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Si possono far esempi di vettori fra loro ortogonali rispetto a un prodotto scalare e non ortogonali rispetto a un altro prodotto scalare.
- V F** b) La funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R} che porta ogni coppia di vettori in 1 è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .
- V F** c) Non esistono matrici ortogonali 5×5 .
- V F** d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (xy, xy)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .
V F c) La matrice associata a un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non dipende dalla base scelta su \mathbb{R}^5 .
V F d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se la sua immagine coincide con W .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare reale non omogeneo risolubile non è mai uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F b) Il rango della matrice completa di un sistema lineare reale non può mai essere strettamente inferiore al rango della sua matrice incompleta.
V F c) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione colonna.
V F d) Il rango di una matrice reale 4×5 può essere uguale a 5.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se $r(A) = n$.
V F b) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 2 non può essere ortogonale.
V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A a termini tutti negativi è sempre negativo.
V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(2A) = 2 \det A$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono rette di \mathbb{R}^3 fra loro non parallele che non hanno punti in comune.
V F b) L'equazione cartesiana $4x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F c) Esistono vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
V F d) Il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z + 1 = 0$ e la retta di equazione parametrica $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 2t$ sono fra loro ortogonali in \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A , B e C sono tre insiemi, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
V F b) L'insieme delle matrici invertibili 4×4 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
V F c) L'insieme dei polinomi reali in x è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
V F d) L'insieme dei numeri interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.