

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.
V F b) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
V F c) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
V F c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
V F d) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.
V F b) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
V F c) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.
V F d) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.
V F b) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
V F c) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.
V F d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.
V F b) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
V F c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .
- V F** b) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
- V F** c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** b) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** b) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
- V F** c) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.
- V F** d) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
- V F** d) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.

V F b) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

V F d) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.

V F b) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.

V F c) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .

V F b) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.

V F c) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F b) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.

V F c) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .

V F d) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .

V F c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.

V F d) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .
V F b) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .
V F c) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F d) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.
V F b) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.
V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
V F d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.
V F b) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.
V F c) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
V F d) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.
V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .
V F c) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
V F b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
V F d) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.
V F b) Esistono trasformazioni lineari $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
V F c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
V F d) L'applicazione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.
V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
V F c) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
V F d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.
V F b) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.
V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.
V F b) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.
V F c) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
V F d) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.
V F b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.
V F c) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.
V F b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .
V F d) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
V F b) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.
V F c) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
V F d) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
V F c) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.
V F b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
V F c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.
V F d) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F b) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .
V F c) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .
V F d) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
V F c) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
V F b) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.
V F c) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
V F b) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.
V F d) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
V F b) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.
V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.
V F d) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.
V F b) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
V F b) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .
V F c) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolubili.
V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .
- V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
- V F** b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.
- V F** c) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** d) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
- V F** b) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .
- V F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** d) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
- V F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.
- V F** c) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.
- V F** d) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.
V F c) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.
V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
V F b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .
V F c) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.
V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.
V F c) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
V F d) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.
V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F b) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .
V F c) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .
V F d) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.
V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .
V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.
V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
V F d) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
V F b) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
V F c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
V F b) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F c) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.
V F d) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.
V F c) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
V F d) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.
V F d) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.
V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.
V F c) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .
V F d) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
V F b) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.
V F c) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.
V F d) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.
V F b) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.
V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
V F d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .
- V F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
- V F** c) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** b) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
- V F** c) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
- V F** d) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
- V F** b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.
- V F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.
- V F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
- V F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.
- V F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
- V F** c) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.
- V F** d) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .
- V F** b) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .
- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.
- V F** b) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.
- V F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .
- V F** d) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.
- V F** b) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .
- V F** c) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
- V F** d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.
- V F** b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
- V F** c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.
- V F** d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.
- V F** b) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
- V F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** d) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.
- V F** b) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
- V F** c) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
- V F** d) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
- V F** b) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** d) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.
- V F** b) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
- V F** c) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.
- V F** d) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
- V F** c) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** d) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
- V F** c) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
- V F** d) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.
- V F** b) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .
- V F** c) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
- V F** d) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolubili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** c) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
V F b) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.
V F c) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.
V F d) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
V F c) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.
V F d) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.
V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
V F d) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.
V F b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.
V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.
V F d) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.
V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.
V F d) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.
- V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .
- V F** d) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** b) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
- V F** b) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
- V F** c) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
- V F** b) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
- V F** d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F b) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
V F c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .
V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.
V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F c) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .
V F d) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F b) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .
V F c) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .
V F d) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
V F b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.
V F c) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.
V F d) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.
V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
V F d) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.
V F b) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.
V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
V F d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolubili.
V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.
V F c) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .
V F d) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F b) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.
V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.
V F c) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
V F d) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.
V F b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .
V F c) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.
V F b) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .
V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.
V F c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.
- V F** b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
- V F** c) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
- V F** d) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
- V F** c) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.
- V F** d) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
- V F** b) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
- V F** d) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** b) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
- V F** d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.
- V F** b) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.
- V F** c) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
- V F** d) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .
- V F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.
- V F** b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.
- V F** c) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
- V F** d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** b) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.
- V F** d) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** b) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
- V F** c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.
- V F** d) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .
- V F** b) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .
- V F** d) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** c) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .
- V F** d) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.
- V F** b) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.
- V F** c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.
- V F** d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.
- V F** b) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.
- V F** c) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
- V F** d) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** c) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.
- V F** d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.
V F b) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
V F c) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.
V F d) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.
V F b) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.
V F c) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
V F b) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.
V F c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
V F b) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.
V F c) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
V F d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.
- V F** c) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .
- V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.
- V F** b) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
- V F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** d) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
- V F** b) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** d) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** c) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .
- V F** b) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .
- V F** d) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.
- V F** b) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
- V F** c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .
- V F** d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.
- V F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .
- V F** c) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.
- V F** d) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
- V F** d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
- V F** c) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
- V F** d) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
- V F** b) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .
- V F** c) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.
V F b) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.
V F c) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
V F d) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.
V F b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
V F c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.
V F d) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
V F c) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
V F b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.
V F c) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.
V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.
V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.
V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
V F c) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.
V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.
V F c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .
V F d) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** c) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.
- V F** d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .
- V F** c) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** d) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
- V F** d) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
- V F** b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.
- V F** c) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
- V F** d) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
V F b) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
V F c) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.
V F d) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
V F b) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.
V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.
V F b) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
V F c) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.
V F d) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
V F c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.
V F b) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.
V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
V F d) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
V F b) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.
V F c) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .
V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.
V F b) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
V F d) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.
V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
V F c) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .
V F b) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.
V F c) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
V F b) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.
V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
V F d) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.
V F d) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
V F b) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.
V F c) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.
V F d) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .
V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
V F c) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.

- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
V F b) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
V F b) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
V F c) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
V F b) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
V F c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
V F d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.
V F b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.
V F c) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
V F d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.
V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
V F c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .
V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.
V F c) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
V F d) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .
V F b) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F c) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F d) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.
V F c) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
V F d) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.
V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F d) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.
V F b) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
V F c) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
V F d) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.
- V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
- V F** d) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .
- V F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.
- V F** c) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
- V F** d) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
- V F** b) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.
- V F** c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.
- V F** d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.
- V F** c) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
- V F** d) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.
V F c) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.
V F d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.
V F c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.
V F b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .
V F d) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .
- V F** c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.
- V F** b) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
- V F** c) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.
- V F** d) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
- V F** b) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.
- V F** d) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** b) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.
- V F** b) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.
- V F** c) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.
- V F** d) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
- V F** b) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.
- V F** c) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** b) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .
- V F** d) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
- V F** b) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
- V F** c) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** d) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** b) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.
- V F** b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
- V F** c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.
- V F** d) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
- V F** b) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .
- V F** c) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** c) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.
- V F** d) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
- V F** d) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
- V F** c) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.
V F c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
V F b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .
V F c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
V F d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.
V F b) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.
V F d) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .
V F b) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F c) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .
V F d) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .
V F b) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.
V F c) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
V F c) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .
V F b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.
V F b) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.
V F d) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.
V F c) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.
V F d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
V F b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
V F d) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
V F b) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.
V F c) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .
V F b) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
V F c) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.
V F d) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
V F b) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.
V F c) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.
V F d) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .
V F b) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.
V F d) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .
V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.
V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
V F b) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
V F c) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.
V F d) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.
V F b) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.
V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F d) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
V F b) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.
V F c) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.
V F d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$, il suo polinomio caratteristico ha grado n .
V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è suriettivo.
V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.
V F d) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.
V F b) Se una matrice reale ha rango k , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a k .
V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C) - n$, dove C è la sua matrice completa.
V F d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(0, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
V F b) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 .
V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni (x, y, z) è lineare.
V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 e quello dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni retta di \mathbb{R}^3 è individuata dalla sua terna di numeri direttori.
V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-x + y + z - 2 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) L'equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano reale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è un insieme di cardinalità m , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A ha cardinalità 2^m .
V F b) Non esistono funzioni suriettive da \mathbb{N} in \mathbb{Z} .
V F c) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di V .
- V F** c) Siano U e W due sottospazi di dimensione 2 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 4.
- V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora ${}^t A = A$.
- V F** b) Se A è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche $3A$ è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** c) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
- V F** d) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.
- V F** c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortonormale di V .
- V F** d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su \mathbb{R}^3 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** b) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a 1, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$ per ogni indice i fra 1 e n .
- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2000}) \geq 0$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Due autospazi distinti di f possono avere in comune dei vettori non nulli.
V F c) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F d) Ogni matrice reale 3×3 possiede almeno un autovalore reale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
V F c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto righe per colonne di matrici reali 3×3 non invertibili è sempre non invertibile.
V F b) Sia r il rango di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $r \leq m$ e $r \leq n$.
V F c) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.
V F d) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ di rango n e $AB = AC$, allora $B = C$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
V F b) Il prodotto di due matrici non ortogonali 3×3 è sempre una matrice non ortogonale 3×3 .
V F c) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo U di uno spazio vettoriale euclideo V può essere vuoto.
V F d) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a -1 .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango.
V F b) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $\dim f(V) = \dim V$.
V F c) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$.
V F d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = r(A)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale. Allora la matrice $A + 2A + 3A$ ha lo stesso rango di A .
V F b) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolubili.
V F c) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.
V F d) Se due matrici reali 2×2 sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
V F b) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.
V F c) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.
V F d) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.
V F b) In \mathbb{R}^4 esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.
V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo.
V F d) L'equazione cartesiana $2x + y - 5z + 2 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F b) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
V F c) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.
V F d) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.