

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.  
**V F** b) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.  
**V F** c) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** d) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.  
**V F** c)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.  
**V F** b) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .  
**V F** c) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.  
**V F** d) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.  
**V F** b) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .  
**V F** c) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.  
**V F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.  
**V F** b) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** c) Esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .  
**V F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .
- V F** b) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.
- V F** c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** b) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- V F** b) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .
- V F** c) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.
- V F** d) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.
- V F** d) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**V F** a) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.

**V F** b) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.

**V F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

**V F** d) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**V F** a) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .

**V F** b) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.

**V F** c) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.

**V F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**V F** a) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .

**V F** b) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.

**V F** c) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .

**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**V F** a) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .

**V F** b) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.

**V F** c) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .

**V F** d) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

**V F** a) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

**V F** b) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .

**V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.

**V F** d) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .
- V F** b) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .
- V F** c) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** d) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .
- V F** b) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .
- V F** c) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
- V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** c) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
- V F** d) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .
- V F** c) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
- V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora  $0$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.  
**V F** b) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.  
**V F** d)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.  
**V F** b) Esistono trasformazioni lineari  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .  
**V F** c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) L'applicazione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .  
**V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.  
**V F** c) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.  
**V F** d) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.  
**V F** b) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.  
**V F** c) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .  
**V F** b) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.  
**V F** c) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .  
**V F** d) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.  
**V F** b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.  
**V F** c) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .  
**V F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .  
**V F** b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .  
**V F** d) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** b) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.  
**V F** c) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .  
**V F** d) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.  
**V F** b) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.  
**V F** c) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.  
**V F** d) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.  
**V F** c) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.  
**V F** d) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .  
**V F** b) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.  
**V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .  
**V F** d) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** b) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .  
**V F** c) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .  
**V F** d) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.  
**V F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.  
**V F** c) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.  
**V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** b) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.  
**V F** c) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .  
**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.  
**V F** b) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.  
**V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.  
**V F** d) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .  
**V F** d) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.  
**V F** b) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .  
**V F** c) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.  
**V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.  
**V F** b) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** c) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolubili.  
**V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k, m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .
- V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .
- V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** d) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .
- V F** b) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .
- V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- V F** d) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .
- V F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.
- V F** c) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.
- V F** d) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.  
**V F** c) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.  
**V F** d) Esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.  
**V F** b) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .  
**V F** d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.  
**V F** b) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.  
**V F** c) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.  
**V F** d) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.  
**V F** c) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** b) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .  
**V F** c) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .  
**V F** d) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.  
**V F** b) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .  
**V F** d) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.  
**V F** b) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.  
**V F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.  
**V F** d) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.  
**V F** b)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** c) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** d) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.  
**V F** b) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.  
**V F** d) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .  
**V F** c) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.  
**V F** d) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.  
**V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** c) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.  
**V F** d) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.  
**V F** b) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .  
**V F** c) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** d) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .  
**V F** b) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.  
**V F** c) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.  
**V F** d) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .  
**V F** b) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .  
**V F** c) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.  
**V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .
- V F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
- V F** c) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** b) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
- V F** c) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .
- V F** b) L'unione di due sistemi lineari risolvibili è un sistema lineare risolvibile.
- V F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolvibile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.
- V F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) Esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .
- V F** c) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.
- V F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.
- V F** b) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .
- V F** c) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.
- V F** d) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .
- V F** b) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** c) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.
- V F** b) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .
- V F** d) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .
- V F** b) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .
- V F** c) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
- V F** d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .
- V F** b) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
- V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .
- V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.
- V F** b) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .
- V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- V F** d) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.
- V F** b) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
- V F** c) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
- V F** d) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.
- V F** b) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** d) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.
- V F** b) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .
- V F** c) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .
- V F** d) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
- V F** c) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** d)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
- V F** c) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
- V F** d) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .
- V F** b) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .
- V F** c) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
- V F** d) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolubili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.
- V F** c) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .  
**V F** b) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .  
**V F** c) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.  
**V F** d) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  
**V F** c) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.  
**V F** d) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.  
**V F** d) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.  
**V F** b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.  
**V F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.  
**V F** d) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.  
**V F** b) Esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .  
**V F** c) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.  
**V F** d) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .
- V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** c) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .
- V F** d) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.
- V F** b) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
- V F** b) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
- V F** c) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
- V F** b) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** c)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** d) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.  
**V F** c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .  
**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .  
**V F** c) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.  
**V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora  $0$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.  
**V F** b) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.  
**V F** c) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .  
**V F** d) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.  
**V F** b) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .  
**V F** c) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .  
**V F** d) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.  
**V F** d) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.  
**V F** b) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.  
**V F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.  
**V F** d) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .  
**V F** b) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .  
**V F** c) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.  
**V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.  
**V F** b) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .  
**V F** c) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** d) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.  
**V F** b) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.  
**V F** c) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .  
**V F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.  
**V F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.  
**V F** c) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .  
**V F** d) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .  
**V F** b) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .  
**V F** c) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.  
**V F** d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.  
**V F** b) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .  
**V F** d) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.  
**V F** b) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.  
**V F** c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) Esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .
- V F** b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
- V F** d) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.
- V F** b) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.
- V F** c) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.
- V F** d) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
- V F** b) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
- V F** d) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** b)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
- V F** d) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .
- V F** b) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.
- V F** c) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .
- V F** d) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .
- V F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.
- V F** b) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.
- V F** c) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
- V F** d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.
- V F** b) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.
- V F** d) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** b) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .
- V F** d) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .
- V F** b) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .
- V F** d) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- V F** c) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .
- V F** d) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .
- V F** b) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .
- V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .
- V F** d) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.
- V F** b) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .
- V F** c) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
- V F** d) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** c) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.
- V F** d) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .  
**V F** b) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.  
**V F** d) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.  
**V F** b) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.  
**V F** c) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .  
**V F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .  
**V F** b) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.  
**V F** c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) L'applicazione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .  
**V F** c) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.  
**V F** d) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.
- V F** c) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .
- V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.
- V F** b) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .
- V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- V F** d) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.
- V F** b) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** d) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.
- V F** c) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .
- V F** b) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .
- V F** d) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .
- V F** b) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
- V F** c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .
- V F** d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .
- V F** c) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.
- V F** d) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.
- V F** d) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
- V F** c) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.
- V F** d) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
- V F** b) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .
- V F** c) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.  
**V F** b) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .  
**V F** c) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .  
**V F** d) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** b) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.  
**V F** c) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .  
**V F** d) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .  
**V F** b) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.  
**V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .  
**V F** d) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.  
**V F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.  
**V F** c) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.  
**V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .  
**V F** b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.  
**V F** c) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.  
**V F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.  
**V F** b) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.  
**V F** c) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .  
**V F** c) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.  
**V F** d) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .  
**V F** c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .  
**V F** d) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.  
**V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** c) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .  
**V F** d) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .
- V F** d) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .
- V F** c) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** d) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
- V F** d) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .
- V F** c) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.  
**V F** b) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.  
**V F** c) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.  
**V F** d) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.  
**V F** b) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.  
**V F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.  
**V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .  
**V F** b) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .  
**V F** c) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.  
**V F** d) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.  
**V F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.  
**V F** c) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** d)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .  
**V F** b) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .  
**V F** c) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.  
**V F** d) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.  
**V F** b) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.  
**V F** c) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.  
**V F** b) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.  
**V F** c) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.  
**V F** d) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.  
**V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.  
**V F** c) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .  
**V F** b) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.  
**V F** c) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** b) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.  
**V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  
**V F** d) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.  
**V F** c) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .  
**V F** b) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .  
**V F** c) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.  
**V F** d) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .  
**V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.  
**V F** c) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.

- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.  
**V F** b) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.  
**V F** c) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.  
**V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.  
**V F** b) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.  
**V F** c) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** d) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.  
**V F** b) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.  
**V F** c)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.  
**V F** b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.  
**V F** c) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .  
**V F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.  
**V F** b) Esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .  
**V F** c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** b) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .  
**V F** c) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.  
**V F** d) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .  
**V F** b) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.  
**V F** d) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.  
**V F** b) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.  
**V F** c) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.  
**V F** d) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.  
**V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** c) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.  
**V F** d) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .  
**V F** b) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.  
**V F** c) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.
- V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
- V F** d) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .
- V F** b) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora  $0$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.
- V F** c) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
- V F** d) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
- V F** b) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .
- V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .
- V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .
- V F** c) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** d) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .  
**V F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.  
**V F** c) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.  
**V F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.  
**V F** c) Esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .  
**V F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .  
**V F** b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .  
**V F** d) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** b) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.  
**V F** c) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .  
**V F** d) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .
- V F** c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.
- V F** b) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.
- V F** c) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.
- V F** b) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.
- V F** d) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** b)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .
- V F** b) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.
- V F** c) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.
- V F** d) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.
- V F** b) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.
- V F** c) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .
- V F** d) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** b) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .
- V F** d) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.
- V F** b) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.
- V F** b) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .
- V F** b) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
- V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .
- V F** d) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.
- V F** b) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .
- V F** c) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- V F** c) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.
- V F** d) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.
- V F** d) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.
- V F** c) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.
- V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.  
**V F** c) Esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .  
**V F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.  
**V F** b) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .  
**V F** c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.  
**V F** b) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.  
**V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.  
**V F** d) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .  
**V F** b) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.  
**V F** c) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .  
**V F** d) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** b) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.  
**V F** c) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .  
**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.  
**V F** c) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.  
**V F** d) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .  
**V F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.  
**V F** c) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.  
**V F** d) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.  
**V F** b) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .  
**V F** d) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .  
**V F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.  
**V F** c) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.  
**V F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.  
**V F** b) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** c)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.  
**V F** b) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.  
**V F** c) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** d) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** b) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.  
**V F** c) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .  
**V F** d) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolvibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .  
**V F** b) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.  
**V F** c) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.  
**V F** d) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.  
**V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .  
**V F** d) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .  
**V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora  $0$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.  
**V F** d) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.  
**V F** b) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.  
**V F** c) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.  
**V F** d) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.  
**V F** b) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.  
**V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** d) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.  
**V F** b) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .  
**V F** c) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .  
**V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , il suo polinomio caratteristico ha grado  $n$ .  
**V F** b) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora  $0$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è suriettivo.  
**V F** c) Ogni matrice reale  $n \times n$  che ammetta  $n$  autovalori distinti è diagonalizzabile.  
**V F** d) Due matrici che abbiano gli stessi autovalori sono sempre fra loro simili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.  
**V F** b) Se una matrice reale ha rango  $k$ , tutti i suoi minori hanno rango non superiore a  $k$ .  
**V F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare  $m \times n$  risolubile è  $r(C) - n$ , dove  $C$  è la sua matrice completa.  
**V F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che portano  $(0, 0, 0)$  in  $(1, 0, 0, 0)$ .  
**V F** b) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** c) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (z, y, x)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.  
**V F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  e quello dei polinomi reali in  $x$  di grado minore o uguale a 9 sono fra loro isomorfi.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni retta di  $\mathbb{R}^3$  è individuata dalla sua terna di numeri direttori.  
**V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - y - z - 1 = 0$  e  $-x + y + z - 2 = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** c) Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(1, 1, 1) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$ .  
**V F** d) L'equazione cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$  rappresenta una parabola del piano reale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è un insieme di cardinalità  $m$ , l'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ha cardinalità  $2^m$ .  
**V F** b) Non esistono funzioni suriettive da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$ .  
**V F** c) L'insieme dei numeri interi dispari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** d) L'insieme delle permutazioni su 4 elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Se in una base di uno spazio vettoriale  $V$  si sostituisce ogni vettore col suo opposto si ottiene un'altra base di  $V$ .
- V F** c) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $U + W$  ha dimensione 4.
- V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno basi della stessa cardinalità.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica, allora  ${}^t A = A$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale triangolare, allora anche  $3A$  è una matrice quadrata reale triangolare.
- V F** c) Il prodotto fra matrici ortogonali è commutativo.
- V F** d) Ogni matrice triangolare è anche diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali non invertibili.
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 2\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ .
- V F** c) Ogni base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  è anche una base ortonormale di  $V$ .
- V F** d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^3$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango pari è positivo.
- V F** b) Se il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è uguale a 1, allora le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.
- V F** c) Sia  $A = (a_j^i)$  una matrice reale  $n \times n$  con  $n \geq 2$  e sia  $A_j^i$  il complemento algebrico dell'elemento  $a_j^i$ . Allora  $\det A = \sum_{j=1}^n a_j^i A_j^i$  per ogni indice  $i$  fra 1 e  $n$ .
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale quadrata, allora  $\det(A^{2000}) \geq 0$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono endomorfismi che non ammettono basi spettrali.  
**V F** b) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Due autospazi distinti di  $f$  possono avere in comune dei vettori non nulli.  
**V F** c) Se due matrici quadrate reali sono fra loro simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.  
**V F** d) Ogni matrice reale  $3 \times 3$  possiede almeno un autovalore reale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a)  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono uno e un solo sistema di generatori.  
**V F** c) L'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  pari è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** d) Ogni anello è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto righe per colonne di matrici reali  $3 \times 3$  non invertibili è sempre non invertibile.  
**V F** b) Sia  $r$  il rango di una matrice reale  $m \times n$ . Allora si ha che  $r \leq m$  e  $r \leq n$ .  
**V F** c) Esistono matrici reali invertibili la cui trasposta non è invertibile.  
**V F** d) Se  $A, B, C$  sono tre matrici reali  $n \times n$  di rango  $n$  e  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  
**V F** b) Il prodotto di due matrici non ortogonali  $3 \times 3$  è sempre una matrice non ortogonale  $3 \times 3$ .  
**V F** c) Il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo  $U$  di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  può essere vuoto.  
**V F** d) Esistono matrici ortogonali che hanno determinante uguale a  $-1$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$  fra loro simili. Allora  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.  
**V F** b) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\dim f(V) = \dim V$ .  
**V F** c) Siano  $B_1$  e  $B_2$  basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$ . Allora  $M_{B_1 B_2} = M_{B_2 B_1}^{-1}$ .  
**V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare e sia  $A$  una matrice associata a  $f$ . Allora  $\dim \ker f = r(A)$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $A$  una matrice reale. Allora la matrice  $A + 2A + 3A$  ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** b) Esistono sistemi lineari reali omogenei non risolubili.  
**V F** c) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi sia  $(1, 0)$  che  $(0, 1)$  in  $(1, 1)$ .  
**V F** d) Se due matrici reali  $2 \times 2$  sono una l'opposta dell'altra, allora hanno la stessa traccia.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.  
**V F** b) Se una matrice reale non contiene minori di rango 3, allora non può avere rango 3.  
**V F** c) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante, allora hanno anche lo stesso rango.  
**V F** d) Ogni matrice triangolare ha determinante nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x = 0$  e  $y = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** b) In  $\mathbb{R}^4$  esistono rette non parallele che non si intersecano fra loro.  
**V F** c) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}$  è il vettore nullo.  
**V F** d) L'equazione cartesiana  $2x + y - 5z + 2 = 0$  rappresenta una retta di  $\mathbb{R}^3$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** b) Tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive.  
**V F** c) L'inversa di una funzione invertibile è sempre invertibile.  
**V F** d) L'intersezione di due insiemi infiniti è sempre un insieme infinito.