18 Gennaio 2016 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Ogni anello commutativo è un campo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F c) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

V F b) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F d) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

V F d) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n + 1$ autospazi distinti.

V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

V F b) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V F d) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F b) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

V F c) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

V F d) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F b) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

V F d) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V F d) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

V F c) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

V F b) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F c) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

V F b) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F d) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V **F** b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V **F** d) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

V **F** b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

V **F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

V **F** b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

V **F** d) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

V F b) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

V F c) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F d) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni anello commutativo è un campo.

V F b) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

V F c) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V F c) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

V F d) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

V **F** c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

V **F** d) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V **F** b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

V **F** c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V **F** d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n + 1$ autospazi distinti.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

V **F** b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

V **F** d) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** d) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V **F** c) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

V **F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

V **F** d) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

V **F** c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V **F** d) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V **F** b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V **F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** c) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

V **F** d) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

V F d) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \dots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

V F c) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n + 1$ autospazi distinti.

V F d) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

V F c) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

18 Gennaio 2016 N. di Matricola: 01010

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

V **F** c) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

V **F** d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

V **F** b) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V **F** d) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V **F** b) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V **F** b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V **F** d) Ogni anello commutativo è un campo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V F d) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

V F c) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

V **F** b) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

V **F** c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V **F** b) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V **F** b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** d) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V **F** d) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F c) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

V F d) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

V F d) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

V F b) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

V F c) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

V F d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F c) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

V F b) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V F c) Ogni anello commutativo è un campo.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

V F b) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F d) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V F c) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F d) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V F c) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

V F d) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n + 1$ autospazi distinti.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V **F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

V **F** d) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

V **F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x,y,z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Siano $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

V **F** b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** d) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

V F b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \dots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

V F d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n + 1$ autospazi distinti.

V F c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V F b) Ogni anello commutativo è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F c) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** b) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

V **F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

V **F** d) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

V **F** d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** b) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

V **F** c) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

V **F** c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

V **F** b) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V **F** d) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

V **F** b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V **F** c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V **F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

V **F** b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V **F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V **F** d) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

V **F** b) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

V **F** c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V **F** d) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F d) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F c) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

V F d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

V F c) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni anello commutativo è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V F d) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F b) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F c) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

V F c) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V F d) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

V F b) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

V F b) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

V F c) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n+1$ autospazi distinti.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F d) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F b) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

V F d) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

V F d) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F c) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

V F d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

V **F** c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V **F** d) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** b) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

V **F** c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V **F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

V **F** c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

V **F** b) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

V **F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

V F d) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

V F b) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n+1$ autospazi distinti.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

V F b) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

V F b) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F c) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Ogni anello commutativo è un campo.

V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V F d) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V **F** c) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

V **F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

V **F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

V **F** c) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V **F** d) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** b) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

V **F** c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V **F** d) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

V **F** b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V **F** c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

V **F** d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V **F** c) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

V **F** d) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V **F** b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** c) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

V **F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

V **F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

V **F** d) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

V **F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** c) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** d) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F d) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

V F c) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

V F c) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni anello commutativo è un campo.

V **F** b) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V **F** c) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V **F** d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V **F** b) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V **F** d) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

V **F** b) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V **F** c) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

V **F** d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V **F** b) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

V F c) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n + 1$ autospazi distinti.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

V F c) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V F d) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \geq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) Siano $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

V F d) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n+1$ autospazi distinti.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V F b) Ogni anello commutativo è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F c) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F d) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

V F c) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

V F d) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

V F b) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V F b) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

V F c) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F d) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

V F c) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

V F b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V **F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** d) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V **F** c) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** d) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F d) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

V F d) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni anello commutativo è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V F d) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F b) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

V F c) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

V F d) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

V F d) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

V F c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n+1$ autospazi distinti.

V F c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V F c) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V F c) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

V F d) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

V F d) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n + 1$ autospazi distinti.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

V F d) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

V F b) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F b) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F d) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y = 0, z = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V F b) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Ogni anello commutativo è un campo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V F b) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

V F c) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F d) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V F b) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F d) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F b) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

V F c) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

V F d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V F b) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F c) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

V F d) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

V F b) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

V F c) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

V F c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici simili hanno sempre la stessa traccia.

V F b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Possono esistere autospazi di f contenenti un solo vettore.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è simmetrica allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $n - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F d) La matrice completa e la matrice incompleta di un qualunque sistema lineare hanno sempre lo stesso rango.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare suriettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F d) Ogni trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ammette una e una sola matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre una e una sola retta.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ sono fra loro paralleli nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F d) $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un sistema di riferimento cartesiano ortogonale se e solo se $n \leq 3$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_2, +_2)$ e il gruppo $(G_2, +_2)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$ allora il gruppo $(G_1, +_1)$ è isomorfo al gruppo $(G_3, +_3)$.

V F b) I campi $(\mathbb{Z}_5, +)$ e $(\mathbb{Z}_7, +)$ sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono una e una sola base.

V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ sono fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche A^{-1} è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora risulta sempre $AB \neq BA$.

V F d) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni sottoinsieme finito dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ induce esattamente una norma su $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det A \cdot \det B$.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^n_n = 0$ allora $\det A = 0$.

V F d) Ogni minore di una matrice quadrata reale A ammette uno e un solo minore orlato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ non può ammettere $n+1$ autospazi distinti.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha almeno un autovalore reale e la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale positivo coincidono sempre.

V F d) Se λ è un autovalore di un endomorfismo iniettivo f di $\mathbb{R}^n$, allora $1/\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme di tutti i monomi x^n per $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F b) Ogni sistema linearmente indipendente costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x+y=0, z=1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ${}^tA$ è invertibile.

V F b) Lo spazio generato dalle righe e lo spazio generato dalle colonne di una matrice reale $n \times n$ coincidono sempre tra loro.

V F c) Esistono matrici reali invertibili A tali che $A^{-1} = {}^tA$.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$ di rango n, A^2 non può essere la matrice nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

V F b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 2 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato ammette almeno una base ortonormale.

V F d) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con determinante negativo ha determinante uguale a -1.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^2 è simile a B^2.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se $m = n$.

V F c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = r(A)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso rango allora hanno anche lo stesso determinante.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite ammettono esattamente una soluzione.

V F c) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F d) Esistono matrici reali che non possono essere ridotte in forma a gradini mediante operazioni riga.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_1 + \ldots + a^n_n A^n_1$.

V F b) Il rango di una matrice reale non nulla è l'ordine del suo più grande minore.

V F c) Il determinante della matrice $-I_n$ (dove I_n è la matrice identità $n \times n$) è -1 se e solo se n è dispari.

V F d) La composizione di due permutazioni dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Per tre punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono suriettive.

V F c) $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V F d) Ogni anello commutativo è un campo.