

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.
V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
V F c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) Ogni campo è un anello commutativo con unità.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
V F c) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .
V F d) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.
V F d) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.
V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
V F c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.
V F d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
- V F** b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
- V F** c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .
- V F** d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_{ij}^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_{ij}^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.
- V F** b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** d) Ogni minore $(n - 1) \times (n - 1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.
- V F** b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
- V F** c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.
- V F** d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** b) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.
- V F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
- V F** c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.
- V F** d) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.
V F b) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.
V F c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
V F d) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.
V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.
V F c) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.
V F d) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.
V F b) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.
V F c) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.
V F b) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.
V F c) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.
- V F** c) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.
- V F** d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.
- V F** b) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
- V F** c) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** d) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.
- V F** b) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.
- V F** c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
- V F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.
- V F** b) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.
- V F** c) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.
- V F** b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** c) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.
- V F** b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
- V F** c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
- V F** d) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.
- V F** b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .
- V F** c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
- V F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni minore $(n - 1) \times (n - 1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
- V F** d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.
- V F** b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.
- V F** d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.
V F b) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A = 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.
V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.
V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
V F d) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
V F b) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.
V F c) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.
V F d) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).
V F b) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.
V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.
V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni campo è un anello commutativo con unità.
V F b) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.
V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
V F d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
- V F** b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.
- V F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.
- V F** b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
- V F** c) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.
- V F** d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.
- V F** b) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
- V F** c) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.
- V F** d) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
- V F** c) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.
- V F** d) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.
V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.
V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
V F b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.
V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.
V F d) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.
V F b) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.
V F d) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.
V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.
V F b) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
V F c) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.
V F d) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano U , W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.
- V F** d) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.
- V F** c) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.
- V F** d) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
- V F** b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.
- V F** c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
- V F** b) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.
- V F** c) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.
- V F** d) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
- V F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
- V F** c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.
- V F** d) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.
- V F** c) Ogni minore $(n-1) \times (n-1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A+B) = \det A + \det B$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
- V F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.
- V F** c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.
- V F** d) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
- V F** b) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.
- V F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.
- V F** b) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.
- V F** c) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
- V F** d) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
V F b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.
V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
V F d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.
V F b) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.
V F c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
V F d) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
V F b) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .
V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
V F d) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
V F b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F c) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.
V F d) Ogni campo è un anello commutativo con unità.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
V F c) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.
V F d) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.
V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).
V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.
V F d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.
V F b) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.
V F c) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.
V F c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F d) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.
V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.
V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.
V F b) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.
V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.
V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.
V F b) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.
V F c) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.
V F d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .
V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).
- V F** b) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.
- V F** c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.
- V F** d) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
- V F** b) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.
- V F** d) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.
- V F** d) Ogni minore $(n - 1) \times (n - 1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.
- V F** b) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.
- V F** c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** b) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.
- V F** c) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.
- V F** d) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.
- V F** b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
- V F** c) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.
- V F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.
- V F** b) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
- V F** c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.
- V F** b) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
- V F** c) Ogni campo è un anello commutativo con unità.
- V F** d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
- V F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
- V F** b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
- V F** c) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.
- V F** d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
V F c) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.
V F d) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.
V F b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
V F c) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.
V F d) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.
V F b) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.
V F d) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.
V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
V F c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.
V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
V F b) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.
V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A = 0$.
V F d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.
V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.
V F d) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.
V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.
V F c) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.
V F d) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.
- V F** b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .
- V F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
- V F** d) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni minore $(n-1) \times (n-1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A+B) = \det A + \det B$.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.
- V F** d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
- V F** b) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.
- V F** c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.
- V F** d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
- V F** b) Ogni campo è un anello commutativo con unità.
- V F** c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
- V F** b) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.
- V F** c) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .
- V F** d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.
V F b) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.
V F c) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.
V F d) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.
V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.
V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F b) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.
V F c) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
V F d) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.
- V F** c) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.
- V F** b) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
- V F** d) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.
- V F** b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.
- V F** c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
- V F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.
- V F** b) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.
- V F** c) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
- V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.
- V F** b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.
- V F** c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.
- V F** d) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.
- V F** b) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.
- V F** c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
- V F** d) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni minore $(n-1) \times (n-1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.
- V F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A+B) = \det A + \det B$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.
- V F** b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.
- V F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
- V F** c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
- V F** d) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** b) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.
- V F** c) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.
- V F** d) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).
- V F** b) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.
- V F** c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.
- V F** d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni campo è un anello commutativo con unità.
- V F** b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
- V F** d) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.
- V F** b) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .
- V F** c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
- V F** d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.
- V F** b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.
- V F** c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
- V F** d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.
V F b) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Siano U , W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.
V F b) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.
V F c) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.
V F d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
V F b) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.
V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.
V F d) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.
V F b) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
- V F** b) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.
- V F** d) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
- V F** b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.
- V F** b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.
- V F** c) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.
- V F** d) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.
- V F** b) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.
- V F** c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.
- V F** d) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
- V F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.
- V F** d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.
V F c) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.
V F d) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.
V F b) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.
V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
V F d) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .
V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.
V F c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F b) Ogni minore $(n - 1) \times (n - 1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.
V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
V F d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.
- V F** c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.
- V F** d) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.
- V F** b) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
- V F** c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
- V F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.
- V F** b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
- V F** c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.
- V F** d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.
- V F** b) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.
- V F** c) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
- V F** d) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** b) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.
- V F** c) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.
- V F** d) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.
- V F** b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .
- V F** b) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.
- V F** c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
- V F** d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Ogni campo è un anello commutativo con unità.
- V F** c) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
- V F** d) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.
V F b) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
V F c) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.
V F d) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A = 0$.
V F b) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.
V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
V F d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).
V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.
V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.
V F d) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.
V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.
V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.
V F b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
V F c) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.
V F d) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
- V F** b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.
- V F** c) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.
- V F** d) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.
- V F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.
- V F** d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
- V F** b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .
- V F** c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.
- V F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** c) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.
- V F** d) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.
- V F** b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).
- V F** c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.
- V F** d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** c) Ogni minore $(n - 1) \times (n - 1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.
- V F** d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.
- V F** b) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.
- V F** c) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** d) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.
- V F** d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.
- V F** c) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.
- V F** d) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni campo è un anello commutativo con unità.
V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
V F c) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.
V F d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.
V F b) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.
V F c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
V F d) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.
V F b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
V F c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.
V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
V F d) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.
V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.
V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.
V F b) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.
V F c) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
V F d) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.
V F b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.
V F c) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
V F d) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.
V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.
V F c) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.
V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.
V F c) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.
V F c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.
V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.
V F d) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
V F b) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.
V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A = 0$.
V F d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_{ij}^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_{ij}^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
V F d) Ogni minore $(n - 1) \times (n - 1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
- V F** b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.
- V F** c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.
- V F** d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
- V F** b) Ogni campo è un anello commutativo con unità.
- V F** c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
- V F** b) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.
- V F** c) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .
- V F** d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.
- V F** b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.
- V F** c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
- V F** d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
- V F** b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .
- V F** c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
- V F** d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
V F b) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.
V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.
V F d) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.
V F b) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.
V F c) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F d) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
V F b) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.
V F c) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.
V F d) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.
V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).
V F c) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.
V F d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.
- V F** c) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.
- V F** d) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.
- V F** c) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.
- V F** d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.
- V F** c) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
- V F** b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.
- V F** c) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.
- V F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** c) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.
- V F** d) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
- V F** b) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.
- V F** c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.
- V F** d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
- V F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
- V F** c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .
- V F** d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** b) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.
- V F** c) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.
- V F** d) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).
- V F** b) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.
- V F** c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.
- V F** d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** d) Ogni minore $(n - 1) \times (n - 1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.
- V F** b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.
- V F** d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni campo è un anello commutativo con unità.
- V F** b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.
- V F** d) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.
- V F** b) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .
- V F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
- V F** d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.
- V F** b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.
- V F** c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
- V F** d) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.
- V F** b) Siano U , W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.
- V F** c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** b) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.
- V F** c) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
- V F** d) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.
- V F** c) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
- V F** b) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.
- V F** c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.
- V F** d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.
- V F** b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
- V F** c) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.
- V F** d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.
- V F** b) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
- V F** c) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.
- V F** d) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
- V F** b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.
- V F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
- V F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.
- V F** d) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
- V F** c) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.
- V F** d) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
- V F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
- V F** c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .
- V F** d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** d) Ogni minore $(n - 1) \times (n - 1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .
- V F** b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.
- V F** c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.
- V F** d) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
- V F** b) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.
- V F** d) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.
V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.
V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.
V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.
V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.
V F c) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.
V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.
V F b) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.
V F b) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
V F b) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.
V F c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.
V F d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
V F c) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .
V F d) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
V F b) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.
V F c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) Ogni campo è un anello commutativo con unità.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.
V F c) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.
V F d) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
V F b) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A = 0$.
V F d) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.
V F b) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.
V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
V F d) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.
V F d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
V F b) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.
V F c) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.
V F d) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.
V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.
V F c) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).
V F d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.
V F c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.
V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.
V F b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non iniettivo. Allora il nucleo di f coincide con l'autospazio di f associato all'autovalore 0.
V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è ortogonale allora f ammette almeno una base spettrale.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.
V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per colonne.
V F c) Ogni sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.
V F d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue incognite.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .
V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \rightarrow W$ è una applicazione lineare biunivoca e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W .
V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.
V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^8$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f contengano un solo vettore.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune, allora sono parallele.
V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ e il piano di equazione cartesiana $x + y = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).
V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.
V F d) $\mathbb{R}^7$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due gruppi hanno la stessa cardinalità allora sono necessariamente isomorfi.
V F b) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
V F c) L'anello $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo.
V F d) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ ammette un sottoinsieme che è una base di $\mathbb{R}^n$.
V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.
V F d) Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V , allora $\dim W \leq \dim V$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, AB è una matrice $n \times n$ invertibile.
V F b) Se A è una matrice reale diagonale, allora A^2 è una matrice reale diagonale.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e I è la matrice identità $n \times n$, allora $(A + I)(B - I) = AB - A + B - I$.
V F d) La trasposta di una matrice quadrata reale non invertibile è sempre una matrice quadrata reale non invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
V F c) Ogni sottoinsieme finito linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ è costituito da vettori a due a due ortogonali.
V F d) Ogni base ortonormale è anche una base ortogonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.
V F c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Se si ha $a_1^1 = a_1^2 = \dots = a_1^n = 0$ allora $\det A = 0$.
V F d) Ogni minore $(n - 1) \times (n - 1)$ di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.
V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori non è nulla.
V F c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre diverse fra loro.
V F d) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora $-\lambda$ è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1} .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme di tutti i monomi x^n con $n \in \mathbb{N}$ dispari è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x .
V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^8$ costituito da 8 vettori di $\mathbb{R}^8$ è una base di $\mathbb{R}^8$.
V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y = 0, x + y + z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
V F d) Lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali nella variabile x non ammette sottospazi vettoriali finitamente generati.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A = 0$.
V F b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^2 è una matrice reale simmetrica.
V F c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F d) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, 2\mathbf{v} \rangle = \langle 2\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
V F b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 3 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 3.
V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente una base ortonormale.
V F d) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B , allora A^{-1} è simile a B^{-1} .
V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare biunivoca. Allora $m = n$.
V F c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V . Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = (M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V))^{-1}$.
V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici quadrate reali di rango 0.
V F b) Tutti i sistemi lineari di 3 equazioni in 5 incognite ammettono almeno una soluzione.
V F c) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.
V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = a_n^1 A_n^1 + a_n^2 A_n^2 + \dots + a_n^n A_n^n$.
V F b) Se A è una matrice reale allora A e $2A$ hanno lo stesso rango.
V F c) L'unica matrice $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.
V F d) L'inversa di una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) Per tre punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.
V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.
V F d) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ iniettive sono anche suriettive.
V F c) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.
V F d) Ogni campo è un anello commutativo con unità.