Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $(\mathbb{Z}_2,+)$ e $(\mathbb{Z}_3,+)$ sono due gruppi isomorfi.

V **F** b) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V **F** c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Ogni gruppo finito è commutativo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V **F** c) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

V **F** b) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

V **F** d) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V **F** b) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V **F** c) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

V **F** d) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V **F** b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \ldots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V **F** d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

V F d) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V F c) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F b) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n-1$.

V **F** b) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V **F** d) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

V **F** b) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

V **F** c) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

V **F** c) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1, 0)$ in $(0, 1)$ e $(0, 1)$ in $(1, 0)$.

V **F** b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

V **F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V **F** d) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a_n^n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

V F c) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

V F d) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

V F b) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V)M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = n - r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F c) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

V F d) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F c) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V F d) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

V F b) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

V F b) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

V F b) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

V F c) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F b) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

V F d) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni gruppo finito è commutativo.

V F b) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = n - r(A)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V)M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

V F c) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F c) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

V F d) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n - 1$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V F b) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V F d) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a_n^n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V F c) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1,0)$ in $(0,1)$ e $(0,1)$ in $(1,0)$.

15 Febbraio 2016 N. di Matricola: 01001

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a_n^n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

V **F** d) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V **F** c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V **F** d) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V **F** b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** d) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V **F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V **F** c) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

V **F** d) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

V F c) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V F b) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V F b) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

V F c) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

15 Febbraio 2016 N. di Matricola: 01010

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

V F b) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n-1$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F d) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V F b) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V F d) Ogni gruppo finito è commutativo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

V F d) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F c) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

V F d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1, 0)$ in $(0, 1)$ e $(0, 1)$ in $(1, 0)$.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V F d) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

V F c) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

V F d) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V)M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = n - r(A)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

V F b) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

V F c) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a^n_n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F b) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

V F c) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V F b) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F d) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F b) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

V F c) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

V F d) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

V F d) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

V F b) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F d) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

V F d) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

15 Febbraio 2016 N. di Matricola: 01100

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V)M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

V **F** b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V **F** c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = n - r(A)$.

V **F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

V **F** b) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V **F** b) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V **F** c) Ogni gruppo finito è commutativo.

V **F** d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

V **F** b) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V **F** c) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

V **F** d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V F c) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

V F d) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n - 1$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F c) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F d) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1, 0)$ in $(0, 1)$ e $(0, 1)$ in $(1, 0)$.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V F c) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

V F d) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

15 Febbraio 2016 N. di Matricola: 01101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V **F** b) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

V **F** d) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** c) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

V **F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

V **F** b) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

V **F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V **F** d) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

V F d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V F b) Ogni gruppo finito è commutativo.

V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V F b) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

V F c) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

15 Febbraio 2016 N. di Matricola: 01110

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F b) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

V F c) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a^n_n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

V F d) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

V F c) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V F c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

V F b) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n-1$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F d) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\, f = n - r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1,0)$ in $(0,1)$ e $(0,1)$ in $(1,0)$.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V F d) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

V F d) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

V **F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V **F** c) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V **F** d) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

V **F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** d) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

V **F** b) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

V **F** c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

V **F** d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V **F** c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

V F d) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F b) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

V F d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni gruppo finito è commutativo.

V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V F d) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

V F b) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F d) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

V F b) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a_n^n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

V F b) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n - 1$.

V F c) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

V F d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i. Allora $\det A = a_1^1 A_1^1 + a_2^2 A_2^2 + \ldots + a_n^n A_n^n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F b) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V F d) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

V F d) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V)M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\, f = n - r(A)$.

V F d) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1,0)$ in $(0,1)$ e $(0,1)$ in $(1,0)$.

V F c) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

V F d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F d) Siano $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V F b) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

V F c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F d) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

V F b) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

V F c) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F b) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \ldots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

V F b) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a_n^n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** b) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

V **F** d) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

V **F** b) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

V **F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V **F** b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V **F** c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

V **F** d) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

V **F** b) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

V **F** d) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

V **F** c) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

V **F** b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

V **F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

V **F** d) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

V **F** c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V **F** d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) Ogni gruppo finito è commutativo.

V **F** c) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V **F** d) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V F c) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1,0)$ in $(0,1)$ e $(0,1)$ in $(1,0)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

V F b) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F d) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F b) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

V F d) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = n - r(A)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V)M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F c) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

V F d) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n - 1$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V F b) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

V F c) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

V F d) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

V F c) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a^n_n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V F c) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni gruppo finito è commutativo.

V **F** b) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V **F** c) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V **F** d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

V **F** b) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V **F** d) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n - 1$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

V **F** b) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V **F** c) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

V **F** d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = n - r(A)$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V)M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

V F b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1, 0)$ in $(0, 1)$ e $(0, 1)$ in $(1, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F c) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

V F c) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

V F b) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

V F c) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V F d) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V F b) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V F b) Siano $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F b) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

V F d) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n\times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V F b) Ogni gruppo finito è commutativo.

V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V F b) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

V F c) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F b) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

V F c) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V F d) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \ldots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

15 Febbraio 2016 N. di Matricola: 10110

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1,0)$ in $(0,1)$ e $(0,1)$ in $(1,0)$.

V F c) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

V F d) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n\times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F b) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n - 1$.

V F c) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F d) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F c) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V F b) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

V F c) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a_n^n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

V F c) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

V F d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V)M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = n - r(A)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F d) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

15 Febbraio 2016 N. di Matricola: 10111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F c) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

V F d) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F b) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

V F d) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

V **F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

V **F** d) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

V **F** b) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

V **F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

V **F** d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni gruppo finito è commutativo.

V **F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V **F** d) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

V **F** b) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

V **F** b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

V **F** c) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

V **F** d) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a_n^n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

V F d) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

V F b) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

V F c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F d) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = n - r(A)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V)M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V F c) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1, 0)$ in $(0, 1)$ e $(0, 1)$ in $(1, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F c) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

V F d) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n - 1$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

V F d) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

V F b) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

V F b) Siano $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

V F b) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a_n^n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F b) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V F d) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F c) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

V F d) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

V F d) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V F b) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Ogni gruppo finito è commutativo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V F b) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

V F c) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1, 0)$ in $(0, 1)$ e $(0, 1)$ in $(1, 0)$.

V F d) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V F b) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

V F d) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F b) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F d) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

V F d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F b) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F c) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n - 1$.

V F d) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

V F c) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\, f = n - r(A)$.

V F c) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono più di un polinomio caratteristico.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è diagonale allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Se due matrici sono simili hanno gli stessi autovalori.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è sempre una soluzione del sistema lineare omogeneo associato.

V F b) Il rango di una matrice reale $n \times n$ non può mai essere strettamente superiore a n.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $m \times n$ è $n - r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

V F d) La matrice completa e la matrice incompleta di un sistema lineare possono coincidere.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora $\{f^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ per ogni (x, y, z) è lineare.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due rette non parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano sempre in uno e un solo punto.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (2\mathbf{u})$ è il vettore nullo.

V F d) Esistono punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno le stesse coordinate rispetto a tutti i sistemi di riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi di cardinalità 2 sono fra loro isomorfi.

V F b) Tutti i campi finiti sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme dei polinomi reali nella variabile y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 3 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con $a_n^n = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Esistono spazi vettoriali privi di sottoinsiemi linearmente dipendenti.

V F c) Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V. Allora $V - U$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^7$ sono fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale invertibile, allora anche ${}^tA$ è una matrice quadrata reale diagonale invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici ortogonali $n \times n$, allora risulta sempre $AB = BA$.

V F d) Non esistono matrici reali che siano contemporaneamente simmetriche e ortogonali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$, allora A è una matrice ortogonale.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni sottoinsieme di cardinalità n dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ i cui vettori siano non nulli e a due a due ortogonali è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La funzione che porta ogni coppia $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ di vettori di $\mathbb{R}^2$ nel numero reale $2x_1y_1 + 2x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$, allora $\det(tA) = t^n \det A$.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne della matrice $n \times n$ considerata.

V F c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i. Se A contiene $2n$ zeri allora $\det A = 0$.

V F d) Ogni matrice reale $m \times n$ ha esattamente mn minori.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che ammettono un solo autospazio.

V **F** b) Ogni matrice reale $n \times n$ che ammetta n autovalori distinti è diagonalizzabile.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V **F** d) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^3 è un autovalore di f^3.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme di tutte le matrici reali 3×3 contenenti esattamente un termine non nullo è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale di tutte le matrici reali 3×3.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ costituito da 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali che non ammettono basi finite.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $-A$ è invertibile.

V **F** b) La somma di due matrici reali $n \times n$ di rango n è una matrice di rango n.

V **F** c) Esistono matrici reali invertibili che sono anche simmetriche.

V **F** d) Esistono matrici reali $n \times n$ non nulle tali che A^2 è la matrice nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il corrispondente prodotto scalare. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 30 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^{100}$ ha dimensione 70.

V **F** c) Non esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettano almeno una base ortogonale.

V **F** d) Le matrici che hanno determinante uguale a 2 non possono essere ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora A^3 è simile a B^3.

V **F** b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora f è suriettiva se e solo se $m = n$.

V **F** c) Siano $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(id_V) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(id_V)$.

V **F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = n - r(A)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso rango.

V F b) L'unione di due sistemi lineari risolubili è un sistema lineare risolubile.

V F c) Esiste uno e un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che mandi $(1,0)$ in $(0,1)$ e $(0,1)$ in $(1,0)$.

V F d) Tutte le matrici reali $n \times n$ possono essere ridotte alla matrice identica $n \times n$ mediante operazioni riga.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F b) Il rango di una matrice reale A non nulla è k se e solo se A contiene almeno un minore $k \times k$ che abbia determinante non nullo.

V F c) Il determinante di una matrice reale $n \times n$ è nullo se e solo se il rango di quella matrice è minore o uguale a $n - 1$.

V F d) La composizione di due permutazioni pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è una permutazione pari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $z = 1$ e $y = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Per quattro punti distinti e non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa sempre uno e un solo piano.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{u}$ e $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u}$ sono fra loro ortogonali.

V F d) In $\mathbb{R}^3$ si possono trovare 4 rette distinte che siano tutte a due a due ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive sono anche suriettive.

V F c) $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(\mathbb{Z}_3, +)$ sono due gruppi isomorfi.

V F d) Ogni gruppo finito è commutativo.