13 Giugno 2016 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

V **F** b) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V **F** c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** d) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n+1$ sono linearmente dipendenti.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

V **F** b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V **F** c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V **F** d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

V **F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

V **F** d) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

V F b) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V F c) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x + 3y, 1)$ per ogni (x, y) è lineare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V F c) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

V F b) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F d) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

13 Giugno 2016 N. di Matricola: 00110

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V **F** c) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V **F** d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

V **F** b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V **F** c) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

V **F** b) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

V **F** c) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

V **F** b) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

V **F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** d) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F d) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

V F d) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

V F b) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n+1$ sono linearmente dipendenti.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V F d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x,y) = (2x+3y, 1)$ per ogni (x,y) è lineare.

V F b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

V F c) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

V F b) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

V F d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V **F** b) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

V **F** c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V **F** d) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

V **F** b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

V **F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

V **F** d) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

V **F** c) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

V **F** d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V **F** b) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

V **F** c) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V **F** c) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

V **F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

V **F** d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

V **F** b) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

V **F** b) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

V F d) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

V F b) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

V F c) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F c) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

V F d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

V F b) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

V F b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

V F c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V F b) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

V F c) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

V F c) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F d) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x + 3y, 1)$ per ogni (x, y) è lineare.

V F d) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

V F d) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F b) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V **F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

V **F** c) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

V **F** d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

V **F** c) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V **F** d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V **F** b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** d) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n + 1$ sono linearmente dipendenti.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** c) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F c) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

V F d) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F d) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F c) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

13 Giugno 2016 N. di Matricola: 01011

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

V **F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V **F** c) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

V **F** d) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V **F** b) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$.

V **F** d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

V **F** c) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

V **F** d) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V **F** b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

V **F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

V **F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x + 3y, 1)$ per ogni (x, y) è lineare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

V F c) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V F b) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

V F b) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

V F c) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F b) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

V F c) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

V F d) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F b) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V F c) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

V F d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

V F b) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

V **F** b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V **F** c) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V **F** d) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V **F** c) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n+1$ sono linearmente dipendenti.

V **F** d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

V **F** b) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V **F** c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

V **F** d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

V **F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** c) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

V **F** d) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V **F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F d) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V F b) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F d) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x + 3y, 1)$ per ogni (x, y) è lineare.

V F b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

V F d) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

V F b) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F c) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V F b) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n + 1$ sono linearmente dipendenti.

V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

V F b) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

V F c) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

V F c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F b) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

V F d) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

V F c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

V F c) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F d) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F c) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F d) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V F d) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F c) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

V F d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x,y) = (2x + 3y, 1)$ per ogni (x,y) è lineare.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

V F c) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V F d) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F b) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

V F c) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

V F d) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

V F c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F b) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F c) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V F d) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n + 1$ sono linearmente dipendenti.

V F b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V F d) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

13 Giugno 2016 N. di Matricola: 10000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F c) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

V F c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

V F d) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F b) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V F b) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

V F c) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F c) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

V F c) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

V F d) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

V **F** c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V **F** d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

V **F** b) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V **F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

V **F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x + 3y, 1)$ per ogni (x, y) è lineare.

V **F** c) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V **F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V **F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V **F** d) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F b) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V F c) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

V F d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

V F c) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

V **F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

V **F** b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

V **F** c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

V **F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** b) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n + 1$ sono linearmente dipendenti.

V **F** c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** b) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V **F** c) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V **F** d) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F c) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

V F d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V F c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V F d) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F c) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

V F d) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

V F b) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

V F c) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

V F c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

V F d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V F b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x,y) = (2x+3y, 1)$ per ogni (x,y) è lineare.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x,y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

V F d) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

V F d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V F b) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V F c) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

V F d) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

V F d) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

V F b) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

V F b) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F d) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V **F** b) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V **F** c) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V **F** c) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V **F** b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V **F** c) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

V **F** d) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n + 1$ sono linearmente dipendenti.

V **F** b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

V F b) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

V F b) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F c) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V F d) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V **F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V **F** c) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

V **F** d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V **F** b) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V **F** c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V **F** d) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

V **F** b) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V **F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F c) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V F b) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n+1$ sono linearmente dipendenti.

V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

V F b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F d) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

V F b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

V F c) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x,y) = (2x+3y, 1)$ per ogni (x,y) è lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

V **F** c) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

V **F** d) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

V **F** c) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

V **F** d) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

V **F** c) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

V **F** d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

V **F** d) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F d) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F c) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

V F d) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** b) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

V **F** c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

V **F** d) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V **F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

V **F** c) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

V **F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x + 3y, 1)$ per ogni (x, y) è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

V **F** d) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

V **F** c) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

V **F** d) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V **F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

V **F** c) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V **F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

V **F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V **F** c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

V **F** d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** c) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

V **F** d) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n+1$ sono linearmente dipendenti.

V **F** b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** d) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

V **F** b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V **F** c) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

V **F** d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F b) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

V F d) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

V F b) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

V F c) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA^tB$.

V F c) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F d) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

V **F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** c) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

V **F** d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V **F** b) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V **F** d) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V **F** d) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

V **F** b) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V **F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

V **F** c) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

V **F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x + 3y, 1)$ per ogni (x, y) è lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V **F** b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

V **F** c) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V **F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

V **F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

V **F** d) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** b) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

V **F** c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F c) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

V F d) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F c) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

V F c) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F b) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F c) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

V F d) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** d) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n+1$ sono linearmente dipendenti.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V **F** b) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** b) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

V **F** c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

V **F** d) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V **F** b) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

V **F** c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V **F** d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

V F b) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F d) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

V F c) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

V F d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V F b) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

V F b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^3 è un autovalore di A^3.

V **F** b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se λ è un autovalore di f, esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

V **F** c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è diagonalizzabile.

V **F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua forma ridotta per righe.

V **F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $m - r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V **F** c) Ogni sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione.

V **F** d) Esistono infiniti endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che mandano sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita è iniettivo se e solo se è suriettivo.

V **F** b) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W.

V **F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se non ha rango massimo.

V **F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x + 3y, 1)$ per ogni (x, y) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $2x - y - z + 7 = 0$ e $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) L'equazione cartesiana $x^3 - 2y^3 + xy - 1 = 0$ rappresenta una conica del piano reale.

V **F** d) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = t+1, y = t, z = t-1$ e $x = t+1, y = -t, z = t-1$ sono fra loro parallele.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle matrici ortogonali 3×3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F c) Ogni gruppo contiene un numero infinito di elementi.

V F d) Siano A, B, C insiemi. Allora $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali in x è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale finitamente generato può essere completato a una base.

V F c) Se due spazi vettoriali reali hanno dimensioni diverse non possono essere isomorfi.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali reali ammettono una e una sola base.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale A è simmetrica se e solo se $A = {}^tA$.

V F b) Sia d la dimensione dello spazio delle righe di una matrice reale $m \times n$. Allora si ha che $d \leq m$ e $d \leq n$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.

V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Uno spazio vettoriale euclideo V è uno spazio vettoriale dotato dell'operazione di prodotto per uno scalare reale, applicabile a ogni vettore di V.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, -x)$ è una isometria di $\mathbb{E}^2$.

V F d) Ogni insieme di vettori di norma 1 di uno spazio vettoriale euclideo V finitamente generato si può completare a una base ortonormale di V.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale A è k se e solo se A ha un minore $k \times k$ di determinante non nullo.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a^n_{\sigma(n)}$.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e A ha una colonna nulla, allora $\det A = 0$.

V F d) Il determinante di una matrice reale quadrata A è non nullo se e solo se il rango di A è massimo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Ogni autospazio di f è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f è l'endomorfismo nullo.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V, $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione n ogni base ha esattamente n vettori.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di cardinalità $n+1$ sono linearmente dipendenti.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ invertibili è invertibile.

V F b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V F c) Se A è una matrice reale, allora $1 \cdot A = A$.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale diagonale, allora anche A^2 è una matrice quadrata reale diagonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Uno spazio vettoriale euclideo è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare.

V F b) Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione pari. Allora $W^\perp = W$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

V F d) Una base di uno spazio vettoriale euclideo si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (2x, 3y)$ per ogni (x, y) è lineare.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettive.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots , \mathbf{v}_k\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots , f(\mathbf{v}_k)\}$ è una base di W.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(A)$, dove A è la sua matrice incompleta.

V F b) Tutti i sistemi lineari hanno almeno una soluzione.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice incompleta è uguale alla sua matrice completa.

V F d) Il rango di una matrice e quello della sua trasposta coincidono.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia r un intero positivo. Il rango di una matrice reale A è r se e solo se A ha un minore $r \times r$ di determinante non nullo i cui orlati hanno tutti (se esistono) determinante nullo.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni indice j fra 1 e n.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è finito.

V F d) Il determinante della matrice identità $n \times n$ è n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $-2x + y + z + 7 = 0$ e $2x - y - z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) La distanza fra il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z - 1 = 0$ e il punto $(1, 1, 1)$ è $\sqrt{3}/3$.

V F c) Esistono rette di $\mathbb{R}^3$ che non possono essere rappresentate tramite un'equazione cartesiana.

V F d) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F b) Esistono funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ suriettive ma non iniettive.

V F c) Dato un qualunque insieme A, si ha che $A \cap A = A \cup A = A$.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.