26 Luglio 2016 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

V **F** b) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V **F** c) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V **F** c) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V **F** d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

V **F** b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

V **F** d) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

V **F** b) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V **F** c) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** d) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V F c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F c) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

V F d) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

V F b) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F b) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F d) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F b) Se A è una matrice reale allora A e ${}^t\!A$ hanno lo stesso rango.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F d) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

V F c) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F d) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F c) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

V F c) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) < \dim U + \dim W$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, A^5B^7 è una matrice $n \times n$ invertibile.

V F b) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

V F c) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F c) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F d) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

V F b) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

V F b) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F b) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

V F b) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F c) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V F d) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F c) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{BB}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F c) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F c) Se A è una matrice reale allora A e ${}^t\!A$ hanno lo stesso rango.

V F d) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

V F d) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F b) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, A^5B^7 è una matrice $n \times n$ invertibile.

V F d) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) < \dim U + \dim W$.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

V F b) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V F c) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

V F d) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U+W) < \dim U + \dim W$.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, A^5B^7 è una matrice $n \times n$ invertibile.

V **F** c) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

V **F** d) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V **F** b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

V **F** c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V **F** b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

V **F** c) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

V **F** d) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

V F c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

V F d) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

V F c) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

V F d) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

V F c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

V F d) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V F b) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

V F b) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

V **F** c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V **F** b) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V **F** d) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V **F** b) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V **F** b) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

V **F** d) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F d) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

V F d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

V F b) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

V F c) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

V F c) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

V F d) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \ge n$.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) < \dim U + \dim W$.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

V F b) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, A^5B^7 è una matrice $n \times n$ invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V F b) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

V F d) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

V F d) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

V F d) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

V F d) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

V F b) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F d) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F d) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

V F b) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V F c) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

V F d) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

V F b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V F c) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F c) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

V F d) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F c) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F d) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

V F b) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

V F d) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

V F b) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V **F** b) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

V **F** d) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V **F** b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

V **F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V **F** d) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

V **F** b) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

V **F** d) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

V F d) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

V F b) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

V F d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F b) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

V F c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V F b) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

V F c) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

V F c) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F c) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) < \dim U + \dim W$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, A^5B^7 è una matrice $n \times n$ invertibile.

V F c) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F b) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2A^1_2 + a^2_2A^2_2 + \ldots + a^n_2A^n_2$.

V F d) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

V F b) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

V F c) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F d) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

V **F** b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

V **F** c) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V **F** d) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

V **F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** d) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

V **F** b) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

V **F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

V **F** c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V **F** d) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F d) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

V F d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

V F b) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

V F b) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V F d) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) < \dim U + \dim W$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F b) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F c) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F b) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

V F d) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

V F b) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, A^5B^7 è una matrice $n \times n$ invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

V F d) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

V F b) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

V F d) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, A^5B^7 è una matrice $n \times n$ invertibile.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V F c) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

V F d) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F b) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

V F c) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

V F c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

V F b) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) < \dim U + \dim W$.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

V F b) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

V F b) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F c) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

V F c) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

V F b) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V F c) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

V F d) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

V F b) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V F d) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F d) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F c) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F d) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V **F** b) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** c) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

V **F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

V **F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

V **F** d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V **F** b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

V **F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** c) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** b) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V **F** d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** b) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

V **F** c) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

V **F** d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

V **F** b) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

V **F** c) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) < \dim U + \dim W$.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

V **F** d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $A^5 B^7$ è una matrice $n \times n$ invertibile.

V **F** c) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

V **F** d) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^t A$ è una matrice reale diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

V **F** b) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

V **F** d) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \dots, n\}$.

V **F** b) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V **F** d) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V **F** c) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

V **F** d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

V F c) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V F d) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

V F b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

V F c) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F d) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F c) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

V F c) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

V **F** c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V **F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V **F** b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V **F** b) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

V **F** d) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

V **F** b) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

V **F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** d) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

V F c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V F b) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

V F c) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

V F c) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

V F b) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F c) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V F d) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V **F** b) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

V **F** c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

V **F** d) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

V **F** b) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

V **F** c) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V **F** b) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V **F** c) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V **F** d) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

V **F** b) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** c) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, A^5B^7 è una matrice $n \times n$ invertibile.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V F c) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

V F d) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U+W) < \dim U + \dim W$.

V F c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

V F c) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V F b) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\, f = r(A)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V **F** b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

V **F** c) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V **F** d) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V **F** b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

V **F** c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** b) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V **F** d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

V **F** c) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

V **F** d) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

V **F** b) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

V **F** d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

V **F** b) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

V **F** d) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

V **F** b) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V **F** c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

V **F** c) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

V **F** d) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U+W) < \dim U + \dim W$.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F d) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V F c) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, A^5B^7 è una matrice $n \times n$ invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F b) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

V F c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

V F d) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

V F b) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V F c) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

V F d) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F d) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F c) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F d) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

V F c) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

V F c) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

V F d) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

V F b) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

V F d) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F c) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) < \dim U + \dim W$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

V F b) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, A^5B^7 è una matrice $n \times n$ invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

V F c) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F d) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

V F c) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

V F c) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

V F d) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V F b) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

V F d) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** d) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** c) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

V **F** d) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V **F** b) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

V **F** c) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V **F** d) Se A è una matrice reale allora A e ${}^t\!A$ hanno lo stesso rango.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

V **F** c) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** d) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V **F** b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

V **F** c) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

V **F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso rango.

V F b) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ iniettivo. Allora 0 non è autovalore di f.

V F c) Se la matrice associata a un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica è triangolare allora f ammette almeno una base spettrale.

V F d) Se due matrici reali $n \times n$ sono una l'inversa dell'altra allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La differenza fra due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

V F b) Il rango di ogni matrice coincide con la dimensione dello spazio generato dalle sue righe.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre esattamente una soluzione.

V F d) Esistono sistemi lineari reali con esattamente tre soluzioni.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, l'insieme $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente indipendente.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (y, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tali che sia il nucleo che l'immagine di f abbiano dimensione 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ sono parallele a uno stesso piano, allora sono fra loro parallele.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = 1, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $y + z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo.

V F d) $\mathbb{R}^2$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi infiniti sono isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F c) L'anello $\mathbb{Z}_8$ delle classi di resto modulo 8 possiede divisori dello zero.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia uguale a 10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se U e W non hanno in comune solo il vettore nullo, allora $\dim(U + W) < \dim U + \dim W$.

V F d) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita. Se $\dim W > \dim V$, allora W non può essere un sottospazio vettoriale di V.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, $A^5 B^7$ è una matrice $n \times n$ invertibile.

V F b) Se A è una matrice reale diagonale, allora ${}^tA$ è una matrice reale diagonale.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = BA$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F d) La trasposta di una matrice quadrata reale invertibile è sempre una matrice quadrata reale invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se M è una matrice simmetrica 3×3 la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nel vettore colonna $M\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Non esiste alcun vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che sia ortogonale a tutti gli altri vettori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Esistono sottoinsiemi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ che non sono basi di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A una matrice reale quadrata, allora $\det(3A) = 3 \det A$.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Se si ha $A^1_1 = A^2_1 = \ldots = A^n_1 = 0$ allora $\det A = 0$.

V F d) Esistono matrici quadrate reali non nulle che hanno determinante e traccia entrambi nulli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

V F c) La molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore reale sono sempre uguali fra loro.

V F d) Se λ, μ sono autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora $\lambda + \mu$ è un autovalore dell'endomorfismo f.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme di tutti i polinomi $x^n + 1$ con n intero positivo è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ costituito da 9 vettori di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y = 0, 3x + y - 4z = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^3$ ammette esattamente 3 sottospazi vettoriali di dimensione 1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $A + {}^tA$ è invertibile.

V F b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora $5A$ è una matrice reale simmetrica.

V F c) Tutte le matrici quadrate a traccia non nulla sono invertibili.

V F d) Se A, B sono due matrici diagonali reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle \mathbf{u}, -\mathbf{v} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^7$ ha dimensione 4.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo ammette esattamente due basi ortonormali.

V F d) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$ invertibili. Se A è simile a B, allora $2A$ è simile a $2B$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $m \geq n$.

V F c) Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Allora $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice identica $n \times n$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim Im\ f = r(A)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono matrici reali 3×4 di rango 4.

V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 8 incognite ammettono infinite soluzioni.

V F c) Esiste una e una sola trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che abbia come nucleo la retta di equazione $x = 0$.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite ammette almeno una soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n > 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F b) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F c) L'unica matrice ortogonale che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F d) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y = 0$ e $x - y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Per due punti di $\mathbb{R}^3$ passano sempre infiniti piani.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

V F d) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x + y + z = 0$ rappresenta una retta.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutte le funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ iniettive sono anche biunivoche.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto al prodotto righe per colonne.

V F d) Ogni elemento non nullo di un campo è invertibile rispetto al prodotto.