

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.
V F b) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
V F c) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F b) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
V F c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
V F d) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.
V F b) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
V F c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.
V F d) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.
V F b) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
V F c) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.
V F d) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F b) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
V F c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.
V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.
- V F** b) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
- V F** c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.
- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.
- V F** b) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.
- V F** d) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** b) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
- V F** c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.
- V F** d) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** d) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.
- V F** b) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
- V F** d) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
- V F** b) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.
- V F** c) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.
- V F** d) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .
- V F** b) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.
- V F** c) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .
- V F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.
- V F** b) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolvibili.
- V F** c) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .
- V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** d) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.
V F b) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .
V F c) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F d) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.
V F b) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
V F d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.
V F b) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.
V F c) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.
V F d) Il prodotto fra matrici è commutativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.
V F b) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.
V F c) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.
V F d) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
V F b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
V F d) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.
V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.
V F c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.
V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.
V F c) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
V F d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.
V F b) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.
V F c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.
V F d) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.
V F b) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.
V F c) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
V F d) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.
V F b) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.
V F c) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.
V F b) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .
V F c) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .
V F d) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.
V F b) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.
V F c) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
V F d) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.
V F c) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.
V F b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
V F c) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
V F d) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F b) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .
V F c) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.
V F d) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.
V F b) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
V F c) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
V F b) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.
V F c) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.
V F c) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
V F d) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici è commutativo.
V F b) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.
V F c) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.
V F d) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.
V F b) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .
V F c) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.
V F b) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
V F c) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolubili.
V F d) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.
- V F** b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .
- V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici è commutativo.
- V F** b) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.
- V F** c) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.
- V F** d) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
- V F** b) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .
- V F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
- V F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.
- V F** c) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.
- V F** d) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F c) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.
V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
V F b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.
V F c) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.
V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
V F b) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
V F c) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.
V F d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.
V F d) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F b) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.
V F c) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .
V F d) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.
V F b) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.
V F c) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.
V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.
V F c) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
V F d) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
V F b) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
V F c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
V F b) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F c) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.
V F d) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.
V F c) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.
V F d) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.
V F d) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolubili.
V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.
V F c) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
V F b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.
V F c) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.
V F d) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
V F b) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.
V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
V F d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .
- V F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** c) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.
- V F** d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.
- V F** b) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.
- V F** c) Il prodotto fra matrici è commutativo.
- V F** d) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
- V F** b) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.
- V F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.
- V F** d) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
- V F** b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.
- V F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.
- V F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
- V F** c) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.
- V F** d) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .
- V F** b) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.
- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.
- V F** b) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.
- V F** c) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.
- V F** d) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.
- V F** b) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .
- V F** c) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.
- V F** d) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.
- V F** b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
- V F** c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.
- V F** b) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
- V F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** d) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.
- V F** b) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
- V F** c) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.
- V F** d) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** b) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** d) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.
- V F** b) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
- V F** c) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.
- V F** d) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
- V F** c) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** d) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
- V F** c) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.
- V F** d) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.
- V F** b) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
- V F** c) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.
- V F** d) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolvibili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.
- V F** b) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** c) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.
- V F** d) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
V F b) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.
V F c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.
V F d) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
V F c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.
V F d) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.
V F c) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.
V F d) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.
V F b) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.
V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.
V F d) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.
V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.
V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F d) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.
- V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.
- V F** d) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** b) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.
- V F** d) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
- V F** b) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.
- V F** c) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
- V F** b) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
- V F** d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .
V F b) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.
V F c) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.
V F b) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.
V F c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.
V F d) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
V F b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F c) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .
V F d) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F b) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.
V F c) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .
V F d) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.
V F b) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.
V F c) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.
V F d) Il prodotto fra matrici è commutativo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.
V F c) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
V F d) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
V F b) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.
V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
V F d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolvibili.
V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.
V F c) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.
V F b) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.
V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.
V F c) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
V F d) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.
V F b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.
V F c) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.
V F b) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.
V F c) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.
V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.
- V F** b) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .
- V F** c) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.
- V F** d) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.
- V F** c) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.
- V F** d) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.
- V F** b) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
- V F** d) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** b) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
- V F** d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.
- V F** b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.
- V F** c) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
- V F** d) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .
- V F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** c) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.
- V F** b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.
- V F** c) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.
- V F** d) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** b) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.
- V F** c) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
- V F** d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.
- V F** b) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.
- V F** c) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.
- V F** d) Il prodotto fra matrici è commutativo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .
V F b) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F c) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.
V F d) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
V F c) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .
V F d) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
V F b) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.
V F c) Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.
V F d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolvibili.
V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.
V F c) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.
V F d) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.
V F c) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.
V F d) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.
V F b) Il prodotto fra matrici è commutativo.
V F c) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.
V F d) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.
V F b) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.
V F c) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.
V F b) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.
V F c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.
V F b) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.
V F c) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
V F d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.
- V F** c) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .
- V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.
- V F** b) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
- V F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** d) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** b) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** d) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.
- V F** b) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** c) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.
- V F** d) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.
- V F** b) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .
- V F** d) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.
- V F** b) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.
- V F** c) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .
- V F** d) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.
- V F** b) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.
- V F** c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.
- V F** d) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** c) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
- V F** d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.
- V F** c) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
- V F** d) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.
- V F** b) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
- V F** c) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolvibili.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.
V F b) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.
V F c) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
V F d) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.
V F b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
V F c) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
V F d) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.
V F b) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
V F c) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
V F b) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.
V F c) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.
V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.
V F b) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.
V F c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.
V F d) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.
V F c) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.
V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .
V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.
V F c) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .
V F d) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.
- V F** c) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.
- V F** d) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.
- V F** c) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** d) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.
- V F** b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** d) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto fra matrici è commutativo.
- V F** b) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.
- V F** c) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.
- V F** d) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.
V F b) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
V F c) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.
V F d) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.
V F b) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.
V F c) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.
V F b) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
V F c) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.
V F d) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
V F b) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
V F c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.
V F b) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
V F d) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.
- V F** b) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolubili.
- V F** c) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.
- V F** c) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** d) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.
- V F** b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** c) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
- V F** d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .
- V F** b) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.
- V F** c) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
- V F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
V F b) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.
V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
V F d) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.
V F d) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
V F b) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.
V F c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.
V F d) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.
V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.
V F c) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
V F d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.
V F c) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.
V F d) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
V F b) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.
V F c) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
V F b) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
V F c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
V F d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.
V F b) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.
V F c) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
V F d) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.
V F c) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
V F b) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.
V F c) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.
V F d) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolubili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.
V F b) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F c) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F d) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.
V F c) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.
V F d) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.
V F d) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.
V F b) Il prodotto fra matrici è commutativo.
V F c) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.
V F d) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.
- V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** d) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.
- V F** b) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.
- V F** c) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.
- V F** d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
- V F** b) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.
- V F** c) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.
- V F** d) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.
- V F** c) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .
- V F** d) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.
V F c) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.
V F d) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.
V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.
V F b) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .
V F c) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .
V F d) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.
- V F** c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.
- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.
- V F** b) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.
- V F** c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.
- V F** d) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.
- V F** b) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.
- V F** d) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.
- V F** b) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.
- V F** b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.
- V F** c) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.
- V F** d) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** b) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.
- V F** c) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .
- V F** d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
- V F** b) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .
- V F** d) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.
- V F** b) Il prodotto fra matrici è commutativo.
- V F** c) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.
- V F** d) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
- V F** b) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.
- V F** d) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.
- V F** b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
- V F** c) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
- V F** d) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.
- V F** b) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
- V F** c) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolvibili.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.
- V F** d) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** d) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
- V F** c) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.
V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
V F b) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.
V F c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.
V F d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.
V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.
V F c) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
V F d) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .
V F b) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.
V F c) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.
V F d) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.
V F b) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.
V F c) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .
V F b) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.
V F c) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .
V F b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
V F c) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
V F d) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.
V F b) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.
V F c) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.
V F d) Il prodotto fra matrici è commutativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.
V F c) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.
V F d) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
V F b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
V F d) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
V F b) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.
V F c) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.
V F c) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.
V F d) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolvibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
V F b) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.
V F c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.
V F d) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .
V F b) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.
V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.
V F d) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.
V F b) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.
V F c) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.
V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
V F b) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.
V F c) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.
V F d) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.
V F b) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F d) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
V F b) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.
V F c) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.
V F d) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il polinomio $4t^3 - t + 1$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo.
V F b) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^7 . Allora 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettivo.
V F c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.
V F d) Due matrici che abbiano entrambe 2 come unico autovalore sono sempre fra loro simili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se si aggiunge una qualunque equazione a un sistema lineare risolubile si ottiene un sistema lineare risolubile.
V F b) Se A è una matrice reale di rango k , allora anche la matrice $2A$ ha rango k .
V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare $m \times n$ risolubile è $r(C)$, dove C è la sua matrice completa.
V F d) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzioni.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che portano $(1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$.
V F b) Esistono infinite applicazioni lineari distinte da \mathbb{R} a \mathbb{R} .
V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (0, x)$ per ogni (x, y) è lineare.
V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e quello dei polinomi a coefficienti reali in x di grado minore o uguale a 4 sono fra loro isomorfi.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per tre punti di \mathbb{R}^3 passa sempre una e una sola retta.
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di rispettive equazioni cartesiane $x - y - z - 1 = 0$ e $-8x + 8y + 8z - 5 = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Allora $(1, 0, 0) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$.
V F d) In \mathbb{R}^3 si possono trovare quattro rette che siano a due a due ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha cardinalità 1024.
V F b) Non esistono funzioni iniettive da \mathbb{Z} in \mathbb{N} .
V F c) I numeri interi sono un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) L'insieme delle permutazioni su n elementi è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in x con termine costante nullo è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Se in una base di uno spazio vettoriale V si sostituisce ogni vettore col suo triplo si ottiene un'altra base di V .
- V F** c) Siano U e W due sottospazi di dimensione 3 di \mathbb{R}^n . Allora $U + W$ ha dimensione 6.
- V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.
- V F** b) Il triplo di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.
- V F** c) Il prodotto fra matrici è commutativo.
- V F** d) La somma di una matrice triangolare bassa e di una matrice triangolare alta è sempre una matrice diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice ortogonale allora lo è anche $-A$.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Se \mathbf{v}, \mathbf{w} sono due vettori ortogonali di V , allora $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.
- V F** c) Ogni base di uno spazio vettoriale euclideo V è anche una base ortogonale di V .
- V F** d) La base canonica di \mathbb{R}^3 è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^3 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di rango dispari è negativo.
- V F** b) Se il determinante di una matrice reale quadrata A è uguale a $1/2$, allora le righe di A sono linearmente indipendenti.
- V F** c) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice reale 5×5 e sia A_j^i il complemento algebrico dell'elemento a_j^i . Allora $\det A = \sum_{j=1}^5 a_j^5 A_j^5$.
- V F** d) Se A è una matrice reale quadrata, allora $\det(A^{2016}) \geq 0$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un endomorfismo di \mathbb{R}^3 ammette una base spettrale allora ammette un numero infinito di basi spettrali distinte.
- V F** b) Se due endomorfismi di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi autovalori allora coincidono.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche gli stessi autovalori.
- V F** d) Ogni matrice reale 9×9 possiede almeno un autovalore reale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R}^n ammette uno e un solo sistema di generatori.
- V F** c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Ogni campo è un gruppo commutativo rispetto all'operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è sempre non invertibile.
- V F** b) Fra le matrici reali $n \times n$, le matrici di rango massimo sono esattamente quelle invertibili.
- V F** c) Esistono matrici reali che non sono la trasposta di alcuna altra matrice.
- V F** d) Se A, B, C sono tre matrici reali $n \times n$ e $AC = BC$ con C invertibile, allora $A = B$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V . Si ha che $\|\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{w}\| \leq |\alpha|\|\mathbf{v}\| + |\beta|\|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- V F** b) La somma di due matrici ortogonali 2×2 è sempre una matrice ortogonale 2×2 .
- V F** c) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di \mathbb{R}^n per i quali non è definito il complemento ortogonale.
- V F** d) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante uguale a 2.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ fra loro simili. Allora A e B hanno lo stesso rango e la stessa traccia.
- V F** b) Sia f un endomorfismo di \mathbb{R}^n . Allora f è iniettiva se e solo se $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
- V F** c) Siano B_1 e B_2 basi di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n . Allora $M_{B_1 B_2} M_{B_2 B_1} = I_n$, dove I_n denota la matrice identica $n \times n$.
- V F** d) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f . Allora f è iniettiva se e solo se $r(A) = 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia A una matrice reale. Allora A e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
- V F** b) Non esistono sistemi lineari reali di 4 equazioni in 3 incognite che siano risolvibili.
- V F** c) Esiste uno e un solo endomorfismo di \mathbb{R}^2 che mandi sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(0, 0)$.
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ si ottengono una dall'altra permutando le righe, allora hanno lo stesso determinante.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa traccia, allora sono simili.
- V F** b) Se una matrice reale non contiene minori di rango 4, allora non può avere rango 4.
- V F** c) Se due matrici reali $n \times n$ hanno la stessa diagonale principale, allora hanno anche lo stesso determinante.
- V F** d) Ogni matrice che abbia la diagonale principale nulla ha determinante nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe a una qualunque retta data.
- V F** c) Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è il vettore nullo.
- V F** d) L'equazione cartesiana $3x + y - 4z + 1 = 0$ rappresenta una retta di \mathbb{R}^3 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle classi di resto modulo 23 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Tutte le funzioni da un insieme finito in se stesso sono iniettive.
- V F** c) La composizione di due funzioni invertibili da \mathbb{R} a \mathbb{R} è sempre una funzione invertibile.
- V F** d) L'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} è un insieme finito.