Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

2) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che
   A) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.
   B) $A - B$ è non invertibile.
   C) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.
   D) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
   C) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.
   D) $\big((1, 2, 3, 4), (4, 5, 6, 7), (7, 8, 9, 10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

4) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.
   B) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   C) $\det A = 1$.
   D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se $\mathbf{S}$ ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) se si cancella una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.
   D) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.
   C) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.
   D) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.
   B) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.
   C) V ammette infinite basi ortonormali.
   D) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   C) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   D) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.
   B) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.
   C) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
   D) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0,0)$, $(4,2)$ e $(8,6)$ è 4.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(2,1)$ e la retta di equazione $-2x - 2y + 1 = 0$ è $3/2$.
   C) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.
   D) le rette di equazioni cartesiane $-x - 5y = 1$ e $2x + 10y = 3$ sono fra loro parallele.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.

4) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) $\rho(A) = n - 1$.
   B) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.
   C) $\dim ImT = n$.
   D) T^7 è invertibile.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) $A + B$ è non invertibile.
   B) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   C) A non è ortogonale.
   D) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

7) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. È vero che
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   B) se **S** è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.
   C) il sistema lineare omogeneo associato ad **S** ammette sempre almeno una soluzione.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette una ed una sola soluzione.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.
   C) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) $\big((1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7), (7, 8, 9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

9) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.
   B) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.
   C) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.
   D) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che
   A) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   B) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.
   C) $A - B$ è non invertibile.
   D) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.
   B) se si cancella una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se $\mathbf{S}$ ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.
   B) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.
   C) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

4) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.
   B) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.
   D) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\big((1,2,3,4),(4,5,6,7),(7,8,9,10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) l'insieme $\{(x,y,z) \in I\!R^3 : x+2z=0, x-y=0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
   D) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.

6) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.
   B) $\det A = 1$.
   C) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   D) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $-x-5y=1$ e $2x+10y=3$ sono fra loro parallele.
   B) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.
   C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0,0)$, $(4,2)$ e $(8,6)$ è 4.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(2,1)$ e la retta di equazione $-2x-2y+1=0$ è $3/2$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   B) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   C) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
   D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.
   B) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
   C) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.
   D) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.
   B) V ammette infinite basi ortonormali.
   C) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.
   D) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\big((1,2,3),(3,4,5),(5,6,7),(7,8,9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.
   C) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in I\!R^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni derivabili da $I\!R$ in $I\!R$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.
   B) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   C) $A + B$ è non invertibile.
   D) A non è ortogonale.

9) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) T^7 è invertibile.
   B) $\dim ImT = n$.
   C) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.
   D) $\rho(A) = n - 1$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   - A) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.
   - B) $A + B$ è non invertibile.
   - C) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   - D) A non è ortogonale.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - A) $\big((1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7), (7, 8, 9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$.
   - B) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in I\!R^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   - C) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.
   - D) l'insieme delle funzioni derivabili da $I\!R$ in $I\!R$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   - A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   - B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   - C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   - D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.

4) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   - A) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   - B) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.
   - C) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.
   - D) $\det A = 1$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   - A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   - B) se $\mathbf{S}$ ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.
   - C) se X è un sottoinsieme di $I\!R^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.
   - D) se si cancella una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.
   B) A e B hanno lo stesso determinante.
   C) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.
   D) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u\rangle \leq 0$.
   B) se $u, v \in V$ si ha che $\cos\widehat{uv} = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$.
   C) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.
   D) V ammette infinite basi ortonormali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   B) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v\rangle = 3\langle v, u\rangle$.
   B) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v\rangle = 0$.
   C) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u\rangle = 0$.
   D) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.
   B) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.
   C) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
   D) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che
   A) $A - B$ è non invertibile.
   B) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.
   C) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.
   D) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.
   B) le rette di equazioni cartesiane $-x - 5y = 1$ e $2x + 10y = 3$ sono fra loro parallele.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $-2x - 2y + 1 = 0$ è $3/2$.
   D) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(4, 2)$ e $(8, 6)$ è 4.

7) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.
   B) $\rho(A) = n - 1$.
   C) $\dim ImT = n$.
   D) T^7 è invertibile.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
   B) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) $\big((1, 2, 3, 4), (4, 5, 6, 7), (7, 8, 9, 10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se $\mathbf{S}$ è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   C) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette sempre almeno una soluzione.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) $Tr(A+B+C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   B) A non è ortogonale.
   C) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.
   D) $A+B$ è non invertibile.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.
   B) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   C) $\big((1,2,3),(3,4,5),(5,6,7),(7,8,9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2+z^2+t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.

3) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   B) $\det A = 1$.
   C) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.
   D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite ($m, n > 0$). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se si cancella una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.
   C) se $\mathbf{S}$ ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.
   D) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $-x-5y=1$ e $2x+10y=3$ sono fra loro parallele.
   B) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0,0)$, $(4,2)$ e $(8,6)$ è 4.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(2,1)$ e la retta di equazione $-2x-2y+1=0$ è $3/2$.
   D) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.
   B) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.

8) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.
   B) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.
   C) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.
   D) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   B) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) se $\mathbf{S}$ è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   C) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
   C) $\big((1, 2, 3, 4), (4, 5, 6, 7), (7, 8, 9, 10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.

6) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che
   A) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.
   B) $A - B$ è non invertibile.
   C) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   D) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.
   B) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
   C) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.
   D) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.

8) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) $\rho(A) = n - 1$.
   B) $\dim ImT = n$.
   C) T^7 è invertibile.
   D) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.

9) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette infinite basi ortonormali.
   B) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.
   C) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.
   D) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
   B) $\big((1,2,3,4),(4,5,6,7),(7,8,9,10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.
   D) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(-1,-2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   B) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   C) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   D) il punto $(1,2)$ è equidistante dai punti $(2,4)$ e $(3,3)$.

4) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.
   B) $\det A = 1$.
   C) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.
   D) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.
   B) se si cancella una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.
   C) se $\mathbf{S}$ ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che

A) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.

B) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.

C) A e B hanno lo stesso determinante.

D) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.

B) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.

C) V ammette infinite basi ortonormali.

D) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

B) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

D) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

9) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che

A) $A - B$ è non invertibile.

B) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

C) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.

D) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.

2) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.
   B) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.
   D) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) A non è ortogonale.
   B) $A + B$ è non invertibile.
   C) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   D) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle funzioni derivabili da $I\!R$ in $I\!R$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in I\!R^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.
   D) $\big((1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7), (7, 8, 9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.
   B) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.
   C) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
   D) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se $\mathbf{S}$ è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   C) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette sempre almeno una soluzione.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

8) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.
   B) $\rho(A) = n - 1$.
   C) $\dim ImT = n$.
   D) T^7 è invertibile.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $-2x - 2y + 1 = 0$ è $3/2$.
   C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(4, 2)$ e $(8, 6)$ è 4.
   D) le rette di equazioni cartesiane $-x - 5y = 1$ e $2x + 10y = 3$ sono fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.
   B) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.
   C) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   D) $\det A = 1$.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.
   B) A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.
   D) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.

3) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.
   B) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.
   C) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.
   D) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.

4) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite ($m, n > 0$). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. È vero che
   A) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.
   B) se **S** ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.
   C) se **S** ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se si cancella una equazione dal sistema lineare **S** il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che

A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.
B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) le rette di equazioni cartesiane $-x - 5y = 1$ e $2x + 10y = 3$ sono fra loro parallele.
B) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.
C) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $-2x - 2y + 1 = 0$ è $3/2$.
D) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(4, 2)$ e $(8, 6)$ è 4.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
C) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
D) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che

A) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
B) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.
C) $A - B$ è non invertibile.
D) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\big((1, 2, 3, 4), (4, 5, 6, 7), (7, 8, 9, 10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
B) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.
C) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
D) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   B) A non è ortogonale.
   C) $A + B$ è non invertibile.
   D) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.
   B) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.
   C) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.
   D) A è diagonale se e solo se lo è anche B.

3) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.
   B) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.
   C) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.
   D) V ammette infinite basi ortonormali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.
   B) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) $\big((1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7), (7, 8, 9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
   D) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite ($m, n > 0$). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se $\mathbf{S}$ è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette sempre almeno una soluzione.

8) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.
   B) $\rho(A) = n - 1$.
   C) T^7 è invertibile.
   D) $\dim ImT = n$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   B) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   C) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.
   D) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   B) $\big((1,2,3),(3,4,5),(5,6,7),(7,8,9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.
   D) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.

2) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) $\det A = 1$.
   B) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.
   C) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   D) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se si cancella una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.
   B) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se $\mathbf{S}$ ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.
   B) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.
   C) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) $A + B$ è non invertibile.
   B) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.
   C) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   D) A non è ortogonale.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   C) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.

8) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette infinite basi ortonormali.
   B) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.
   C) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.
   D) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
   B) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.

2) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.
   B) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.
   D) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che
   A) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.
   B) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   C) $A - B$ è non invertibile.
   D) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) T^7 è invertibile.
   B) $\dim ImT = n$.
   C) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.
   D) $\rho(A) = n - 1$.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.
   B) $\big((1,2,3,4),(4,5,6,7),(7,8,9,10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme $\{(x,y,z) \in I\!R^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $-x - 5y = 1$ e $2x + 10y = 3$ sono fra loro parallele.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(2,1)$ e la retta di equazione $-2x - 2y + 1 = 0$ è $3/2$.
   C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0,0)$, $(4,2)$ e $(8,6)$ è 4.
   D) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m,n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.
   B) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
   C) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.
   D) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   B) $\det A = 1$.
   C) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.
   D) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.

2) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.
   B) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.
   D) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.

3) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. È vero che
   A) se **S** ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se si cancella una equazione dal sistema lineare **S** il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.
   C) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.
   D) se **S** ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.
   B) le rette di equazioni cartesiane $-x - 5y = 1$ e $2x + 10y = 3$ sono fra loro parallele.
   C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(4, 2)$ e $(8, 6)$ è 4.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $-2x - 2y + 1 = 0$ è $3/2$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.
   B) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.
   C) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
   C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.
   B) $A + B$ è non invertibile.
   C) A non è ortogonale.
   D) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\big((1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7), (7, 8, 9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.
   B) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.
   C) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
   D) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\big((1,2,3,4),(4,5,6,7),(7,8,9,10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(x,y,z) \in I\!R^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.

4) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che
   A) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   B) $A - B$ è non invertibile.
   C) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.
   D) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.
   C) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette sempre almeno una soluzione.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

6) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) T^7 è invertibile.
   B) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.
   C) $\dim ImT = n$.
   D) $\rho(A) = n - 1$.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.
   B) V ammette infinite basi ortonormali.
   C) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.
   D) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.
   B) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   D) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   B) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   C) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   D) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
   B) $\big((1, 2, 3, 4), (4, 5, 6, 7), (7, 8, 9, 10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.
   C) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.
   D) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.

5) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.
   B) V ammette infinite basi ortonormali.
   C) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.
   D) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che
   A) $A - B$ è non invertibile.
   B) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   C) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.
   D) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.

8) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.
   B) $\det A = 1$.
   C) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se $\mathbf{S}$ ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.
   B) se si cancella una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) $\dim ImT = n$.
   B) $\rho(A) = n - 1$.
   C) T^7 è invertibile.
   D) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
   B) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
   B) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.
   C) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.
   D) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $-2x - 2y + 1 = 0$ è $3/2$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $-x - 5y = 1$ e $2x + 10y = 3$ sono fra loro parallele.
   C) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.
   D) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(4, 2)$ e $(8, 6)$ è 4.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2+z^2+t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   B) $\big((1,2,3),(3,4,5),(5,6,7),(7,8,9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) $A+B$ è non invertibile.
   B) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.
   C) A non è ortogonale.
   D) $Tr(A+B+C) = Tr(A)+Tr(B)+Tr(C)$.

7) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.
   B) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.
   C) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.
   D) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n-k$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette sempre almeno una soluzione.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) se $\mathbf{S}$ è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   B) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.
   C) $\det A = 1$.
   D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se $\mathbf{S}$ ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.
   C) se si cancella una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.
   D) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $-x - 5y = 1$ e $2x + 10y = 3$ sono fra loro parallele.
   B) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.
   C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(4, 2)$ e $(8, 6)$ è 4.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $-2x - 2y + 1 = 0$ è $3/2$.

5) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che

A) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.

B) A e B hanno lo stesso determinante.

C) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.

D) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.

6) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.

B) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.

C) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.

D) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.

C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

D) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che

A) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

B) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.

C) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.

D) $A - B$ è non invertibile.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\big((1, 2, 3, 4), (4, 5, 6, 7), (7, 8, 9, 10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

B) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.

C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.

D) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) A non è ortogonale.
   B) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.
   C) $Tr(A+B+C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   D) $A + B$ è non invertibile.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle funzioni derivabili da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   B) $\big((1,2,3),(3,4,5),(5,6,7),(7,8,9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.
   D) l'insieme $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.

4) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.
   B) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.
   C) V ammette infinite basi ortonormali.
   D) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se $\mathbf{S}$ è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.

6) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) T^7 è invertibile.
   B) $\dim ImT = n$.
   C) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.
   D) $\rho(A) = n - 1$.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   B) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   C) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   D) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.
   B) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
   C) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.
   D) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che
   A) se $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se $\mathbf{S}$ ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.
   C) se si cancella una equazione dal sistema lineare $\mathbf{S}$ il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.
   D) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.
   B) A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.
   D) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.

3) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.
   B) V ammette infinite basi ortonormali.
   C) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.
   D) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
   D) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.
   B) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   C) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   B) A non è ortogonale.
   C) $A + B$ è non invertibile.
   D) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.
   B) l'insieme delle funzioni derivabili da $I\!R$ in $I\!R$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in I\!R^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) $\big((1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7), (7, 8, 9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$.

9) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   B) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.
   C) $\det A = 1$.
   D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che
   A) $A - B$ è non invertibile.
   B) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.
   C) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.
   D) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   D) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

3) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) $\dim ImT = n$.
   B) T^7 è invertibile.
   C) $\rho(A) = n - 1$.
   D) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   C) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.
   D) $\big((1, 2, 3, 4), (4, 5, 6, 7), (7, 8, 9, 10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che

A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.
C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.

6) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.
B) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.
C) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.
D) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che

A) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
B) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.
C) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.
D) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $-2x - 2y + 1 = 0$ è $3/2$.
C) le rette di equazioni cartesiane $-x - 5y = 1$ e $2x + 10y = 3$ sono fra loro parallele.
D) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(4, 2)$ e $(8, 6)$ è 4.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite ($m, n > 0$). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. È vero che

A) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette sempre almeno una soluzione.
B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
D) se $\mathbf{S}$ è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita n, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $n = 3$, V è orientato e $u, v \in V$, allora $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$.
   B) esiste almeno un vettore non nullo $v \in V$ tale che $\langle v, v \rangle = 0$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale euclideo di V ed ha dimensione k, allora il suo complemento ortogonale in V ha dimensione $n - k$.
   D) per $u, v \in V$ si ha $\langle 3u, v \rangle = 3\langle v, u \rangle$.

2) Sia T un endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base B di V. Allora
   A) $\det A = 1$.
   B) può darsi che ImT non sia un sottospazio vettoriale di V.
   C) se H è un insieme di generatori per V allora $T(H)$ è un insieme di generatori per ImT.
   D) A^5 è la matrice associata a T^5 rispetto alla base B di V.

3) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. È vero che
   A) se si cancella una equazione dal sistema lineare **S** il nuovo sistema lineare ammette almeno una soluzione in più del precedente.
   B) se **S** ammette almeno una soluzione allora $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) se **S** ha meno equazioni che incognite allora ammette infinite soluzioni.
   D) se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ esiste almeno un sistema lineare a coefficienti reali le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di X.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(2, 1)$ e la retta di equazione $-2x - 2y + 1 = 0$ è $3/2$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $-x - 5y = 1$ e $2x + 10y = 3$ sono fra loro parallele.
   C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(4, 2)$ e $(8, 6)$ è 4.
   D) la curva di equazione $5y^8 - 12x^8 = 1$ è una iperbole.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ iniettive è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata y a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ non invertibili. È vero che
   A) $A + B$ è non invertibile.
   B) $Tr(A + B + C) = Tr(A) + Tr(B) + Tr(C)$.
   C) se la traccia di A è nulla allora è nullo anche il determinante di A.
   D) A non è ortogonale.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme $\{(x, y, z, t) \in I\!R^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora $\dim U \leq \dim V$.
   C) $\big((1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7), (7, 8, 9)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) l'insieme delle funzioni derivabili da $I\!R$ in $I\!R$ è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$, rispetto alle operazioni indotte.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 0$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $y = 0$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 0$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) se il polinomio caratteristico di T ammette una radice di molteplicità algebrica n allora T ammette una base spettrale.
   B) se $n = 2$ ed il polinomio caratteristico di T è $p(t) = t^2 - 10t + 25$ allora $\det A = \det B = 25$ e $Tr(A) = Tr(B) = 10$.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di T è uguale alla sua molteplicità algebrica.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3, dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V può ammettere un numero infinito di orientazioni distinte.
   B) se $u, v \in V$ si ha che $\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.
   C) V ammette infinite basi ortonormali.
   D) per $u, v \in V$ si ha $\langle u - 2v, 2v - u \rangle \leq 0$.

2) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ invertibili. È vero che
   A) gli elementi della diagonale principale di A non possono essere tutti nulli.
   B) $A - B$ è non invertibile.
   C) $(A \cdot B) \cdot A^{100}$ è invertibile.
   D) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita tali che $\dim U + \dim W = \dim V$ allora $U + W = V$.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un sottospazio vettoriale dell'usuale spazio vettoriale delle matrici reali 3×3, rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0, x - y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni indotte.
   D) $\big((1,2,3,4), (4,5,6,7), (7,8,9,10)\big)$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $3y = 1$. È vero che
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle x.

5) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite $(m, n > 0)$. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. È vero che
   A) il sistema lineare omogeneo associato ad **S** ammette sempre almeno una soluzione.
   B) se **S** è possibile, allora ammette infinite soluzioni se e solo se il numero delle sue incognite coincide col suo rango.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = \rho(A)$.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti allora **S** ammette una ed una sola soluzione.

6) Sia T un automorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. È vero che
   A) $\dim ImT = n$.
   B) se B è una base per V allora $T(B)$ è una base per V.
   C) $\rho(A) = n - 1$.
   D) T^7 è invertibile.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. È vero che
   A) A è diagonale se e solo se lo è anche B.
   B) se T ammette una base spettrale allora le matrici A e B sono simmetriche.
   C) se esistono un vettore non nullo $v \in V$ ed un numero reale λ tali che $T(v) = \lambda v$ allora λ è un autovalore di T.
   D) se λ_1 e λ_2 sono autovalori di T allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di T.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $-x + 7y = 100$ e $7x + y = 0$ sono fra loro ortogonali.
   B) il punto $(1, 2)$ è equidistante dai punti $(2, 4)$ e $(3, 3)$.
   C) la curva di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(-1, -2)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 9$ è 1.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ biunivoche è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici 5×5 reali a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.