Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.
V F b) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.
V F c) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.
V F d) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.
V F c) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.
V F d) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.
V F b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.
V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.
V F d) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.
V F b) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.
V F c) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.
V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.
V F c) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n-1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F c) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

V F d) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F b) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V F c) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

V F d) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F b) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

V F b) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

V F c) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

V F d) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F b) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

V F c) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

V F c) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

V F c) Esistono campi con un numero finito di elementi.

V F d) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = \dim W - r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

V F c) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

V F d) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

9/1/2017 N. di Matricola: 00111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

V F b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

V F b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

V F d) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

V F b) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

V F b) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

V F b) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

V F b) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

V F c) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

V F d) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

V F d) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

V F b) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

V F d) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V **F** b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

V **F** c) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = \dim W - r(A)$.

V **F** b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V **F** c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

V **F** d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** b) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

V **F** c) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

V **F** d) Esistono campi con un numero finito di elementi.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V **F** c) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V **F** d) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V **F** b) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

V **F** c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

V **F** d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

V **F** c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V **F** d) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

V **F** d) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** d) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

V **F** b) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V **F** c) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

V **F** d) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

V **F** d) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

V **F** d) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V **F** b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

V **F** c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V **F** d) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

V **F** b) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

V **F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

V **F** d) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

V F b) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

V F c) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

V F d) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n-1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

V F c) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

V F d) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F c) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

V F d) Esistono campi con un numero finito di elementi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F b) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F b) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

V F b) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

V F c) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

V F d) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** c) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

V **F** b) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** c) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

V **F** d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

V **F** b) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V **F** c) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V **F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

V **F** b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

V **F** c) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

V **F** d) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

V **F** b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V **F** c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V **F** d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = \dim W - r(A)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

V F b) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A+B$ è una matrice con traccia 1.

V F b) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

V F c) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

V F b) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

V F c) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

V F b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

V F c) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

V F d) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

V F b) Esistono campi con un numero finito di elementi.

V F c) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

V F c) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

V F d) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

V F b) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F c) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim\ker f = \dim W - r(A)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

V F b) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V F c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

V F c) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

V F d) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

V F b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

V F c) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F c) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

V F d) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F c) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

V F d) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F b) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

V F d) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V F c) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

V F b) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

V F d) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F c) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

V F d) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

V F b) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

V F c) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

V F d) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

V F b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

V F b) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

V F c) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n-1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

V F d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V F b) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

V F b) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

V F c) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

V F d) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F b) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

V F c) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F c) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono campi con un numero finito di elementi.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

V F d) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

V F d) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F b) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = \dim W - r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

V F b) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F c) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

V F b) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

V F d) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

V F b) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

V F c) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

V F d) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n-1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

V F b) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

V F b) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

V F d) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u}-3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$.

V **F** d) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** b) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

V **F** c) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

V **F** d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

V **F** b) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

V **F** c) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

V **F** d) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

V **F** b) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V **F** d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

V **F** b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

V **F** c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

V **F** d) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

V F b) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F b) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F c) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V F b) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

V F b) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

V F d) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

V F b) Esistono campi con un numero finito di elementi.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

V F d) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = \dim W - r(A)$.

V F d) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

V F b) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

V F d) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

V F b) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

V F d) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

V F c) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

V F d) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

V F d) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

V F b) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

V F c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

V F d) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

V F b) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V F c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V F c) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

V F d) Esistono campi con un numero finito di elementi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F c) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F d) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

V F b) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

V F d) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

V F b) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V F c) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

V F d) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

V F b) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

V F d) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

V F d) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = \dim W - r(A)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F c) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F d) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

V F b) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

V F d) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

V F b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

V F d) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

V **F** b) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

V **F** d) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** b) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

V **F** c) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

V **F** d) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** b) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

V **F** c) Esistono campi con un numero finito di elementi.

V **F** d) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V **F** c) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

V **F** c) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

V F c) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

V F d) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

V F b) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F d) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

V F b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

V F c) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = \dim W - r(A)$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

V F c) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

V F b) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

V F c) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V F d) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

V F c) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V F d) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

V F c) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

V F b) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

V F c) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V **F** b) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

V **F** c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V **F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V **F** b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

V **F** b) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

V **F** d) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

V **F** b) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

V **F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** d) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

V F c) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

V F b) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

V F c) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

V F d) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F b) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

V F c) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

V F b) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

V F c) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

V F b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V F b) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

V F d) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Esistono campi con un numero finito di elementi.

V F d) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F b) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F c) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

V F d) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

V F b) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

V F b) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F c) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

V F c) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

V F c) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

V F d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = \dim W - r(A)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

V F b) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

V F c) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

V F b) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

V F c) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

V F d) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n-1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

V F c) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

V F d) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

V F b) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

V F b) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

V F c) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

V F b) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

V F c) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

V F d) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

V F c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono campi con un numero finito di elementi.

V F b) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

V F b) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V F b) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim\ker f = \dim W - r(A)$.

V F b) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \le n$.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

V F b) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V F c) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

V F d) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e della norma indotta $\|\cdot\|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \le \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F c) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

V F d) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità n^n.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \ge 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F c) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F d) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

V F b) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

V F c) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

V F c) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

V F d) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

V F b) Esistono campi con un numero finito di elementi.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

V F b) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

V F c) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

V F b) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

V F b) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

V F d) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

V F b) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

V F c) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V **F** b) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** d) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

V **F** b) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

V **F** c) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

V **F** d) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V **F** b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

V **F** c) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V **F** d) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

V **F** b) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

V **F** d) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** d) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

V F d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F b) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

V F c) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F d) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

V F b) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

V F c) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V F b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = \dim W - r(A)$.

V F c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo diagonalizzabile tale che f^{2017} sia l'identità, allora f è l'identità.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è diagonale.

V F d) Ogni matrice triangolare $A = (a^i_j)$ con $a^1_1 = 0$ ammette 0 come autovalore.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due sistemi lineari coincidono se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

V F b) La permutazione delle colonne di una matrice non cambia il rango della matrice.

V F c) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite ammette sempre almeno una soluzione.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è sempre uno spazio vettoriale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim Im\ f = n$.

V F c) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice nella sua trasposta è lineare.

V F d) Esistono trasformazioni lineari $f : V \to V$ tali che la funzione $f \circ f$ non è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano r, s due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ e siano $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ numeri direttori di r e s, rispettivamente. Allora r e s formano un angolo di $\pi/4$ se e solo se $a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{2}/2$.

V F b) La retta di equazione parametrica $\{x = t, y = 2, z = -t$ e il piano di equazione cartesiana $x - z = 0$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1)$ è il vettore nullo.

V F d) Esistono spazi vettoriali euclidei privi di sistemi di riferimento cartesiano ortogonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle permutazioni su due elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2 sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme dei polinomi reali nella variabile x è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

V F c) L'insieme delle traslazioni del piano è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) Esistono campi con un numero finito di elementi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

V F b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno un sistema di generatori finito.

V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ allora U e W hanno in comune solo il vettore nullo.

V F d) Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W \leq n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali, AB è una matrice $n \times n$ diagonale.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con traccia 1, $A + B$ è una matrice con traccia 1.

V F c) Se A e B sono due matrici reali diagonali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F d) La trasposta di una matrice quadrata reale simmetrica è sempre una matrice quadrata reale simmetrica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni sottoinsieme finito di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere esteso a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = -\det A$.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F c) Sia A una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$. Se tutti i minori di A di ordine $n - 1$ hanno determinante nullo allora $\det A = 0$.

V F d) Ogni minore di una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ ammette uno e un solo minore orlato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore reale può essere nulla.

V F d) Se λ è un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^n è un autovalore dell'endomorfismo f^n.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F c) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x = 1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Lo spazio vettoriale dei polinomi reali nella variabile x che si annullano per $x = 1$ ha dimensione infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

V F b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^n è una matrice reale simmetrica.

V F c) Ogni potenza di una matrice diagonale è una matrice diagonale.

V F d) La trasposta di una matrice quadrata invertibile è sempre una matrice invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^9$ ha dimensione 5.

V F c) Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale.

V F d) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari che abbia determinante positivo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Se A è simile a B, allora ${}^tA$ è simile a ${}^tB$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo suriettivo. Allora $m \leq n$.

V F c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \ker f = \dim W - r(A)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici $n \times n$ reali invertibili hanno rango n.

V F b) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare risolubile. Allora la matrice completa e la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

V F c) Esiste uno e un solo isomorfismo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_2 A^1_2 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_2 A^n_2$.

V F b) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F c) L'unica matrice diagonale $n \times n$ che ha determinante uguale a 1 è la matrice identità $n \times n$.

V F d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità n^n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 2$ e $z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\{x = 0, z = 2$ e $\{x = 1, y = 1$ sono fra loro sghembe.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è il vettore nullo.

V F d) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta una retta.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esiste alcuna corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei numeri naturali.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

V F c) Se due gruppi sono omomorfi hanno la stessa cardinalità.

V F d) Un campo non può mai contenere divisori dello zero.