23 Gennaio 2017   N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

V **F** b) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V **F** c) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

V **F** d) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V **F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

V **F** b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

V **F** d) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V **F** b) Il rango di una matrice reale $m \times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V **F** c) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

V **F** b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

V **F** c) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

V F b) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V F c) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

V F d) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

V F b) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V F c) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V F c) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F b) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

V F c) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

V F b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F c) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

V F b) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

V F c) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = -f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W = n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

V F c) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

V F d) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n \times n$ a traccia nulla.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = I_n$ allora $BA = I_n$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA{}^tB$.

V F d) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F b) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

V F c) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

V F d) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

V F b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

V F b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

V F d) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

V F b) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

V F c) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V F d) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F d) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

V F b) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

V F c) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

V F c) Il rango di una matrice reale $m \times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V F d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u}+3\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

V F d) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F d) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

V F b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

V F c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F d) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su* $\mathbb{R}^n$ *e* $M_{m,n}(\mathbb{R})$ *si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V F b) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

V F d) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F d) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F c) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F d) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V F b) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

V F d) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = I_n$ allora $BA = I_n$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n \times n$ a traccia nulla.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA{}^tB$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W = n$.

V F b) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = -f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V F c) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

V F d) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W=\mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U+\dim W = n$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x)=-f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n\times n$ a traccia nulla.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ e $AB=I_n$ allora $BA=I_n$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$, allora ${}^t(AB)={}^tA{}^tB$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V F b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

V F c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e della norma indotta $\|\cdot\|$. Si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\leq|\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle|+|\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle|$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$.

V F d) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale $m\times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

V **F** b) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

V **F** c) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

V **F** d) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V **F** b) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

V **F** c) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

V **F** d) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

V **F** c) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

V **F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V **F** b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** b) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V **F** c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

V **F** d) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

V F b) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

V F d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F b) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F b) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

V F c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

V F b) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

V F c) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

V F c) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

V F d) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

V F b) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V F d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W=\mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U+\dim W=n$.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x)=-f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ e $AB=I_n$ allora $BA=I_n$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$, allora ${}^t(AB)={}^tA{}^tB$.

V F c) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n\times n$ a traccia nulla.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale $m\times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V F b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f=n$.

V F b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'applicazione $f:M_{m,n}(\mathbb{R})\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

V F d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g\circ f$ non è iniettivo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F c) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

V F b) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

V F c) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V F b) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

V F c) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

V F d) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F c) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

V F d) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

V F c) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F d) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

23 Gennaio 2017 N. di Matricola: 01100

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

V **F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

V **F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** b) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V **F** c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

V **F** b) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V **F** c) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

V **F** d) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

V **F** b) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

V **F** b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V **F** c) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

V **F** d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F c) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

V F d) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

V F b) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

V F b) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

V F c) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V **F** b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

V **F** d) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V **F** b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** c) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

V **F** d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

V **F** c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V **F** d) Il rango di una matrice reale $m \times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

V **F** b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

V **F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

V F b) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

V F c) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

V F d) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

V F b) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

V F c) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

V F d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

V F d) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

V F b) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F d) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = -f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W = n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

V F d) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA{}^tB$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n \times n$ a traccia nulla.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = I_n$ allora $BA = I_n$.

V **F** d) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V **F** b) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V **F** d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

V **F** b) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

V **F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

V **F** b) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

V **F** c) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** b) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V **F** d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V F c) Il rango di una matrice reale $m \times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V F d) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

V F b) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

V F c) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V F d) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

V F c) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

V F d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

V F b) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

V F d) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u}+3\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F c) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

V F b) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

V F c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

V F c) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V F d) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = -f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W = n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F b) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

V F b) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = I_n$ allora $BA = I_n$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n \times n$ a traccia nulla.

V F d) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

V F b) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

V F d) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

V F b) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

V F b) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

V F d) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n \times n$ a traccia nulla.

V **F** b) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = I_n$ allora $BA = I_n$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

V **F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Il rango di una matrice reale $m \times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V **F** d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

V **F** c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

V **F** d) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

V **F** b) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

V **F** c) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V **F** d) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = -f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W = n$.

V **F** c) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** b) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V **F** c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

V **F** b) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

V **F** b) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

V **F** c) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

V **F** d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V **F** b) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

V **F** d) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u}+3\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

V F d) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F d) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

V F c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V F c) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

V F d) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

V F b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

V F c) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V F d) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

V F d) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F c) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F d) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale $m \times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V F b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

V F b) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F d) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

V F b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

V F d) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

V F d) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V **F** d) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V **F** b) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

V **F** c) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

V **F** d) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** b) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V **F** c) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

V **F** d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W = n$.

V **F** b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = -f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

V **F** d) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n \times n$ a traccia nulla.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA{}^tB$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = I_n$ allora $BA = I_n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

V F b) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

V F d) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

V F b) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F d) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

V F b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V F c) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V F d) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

V F c) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V F d) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

V F c) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

V F d) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

V F b) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

V F c) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

V F b) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F c) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V F b) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V F b) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V F b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

V F d) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

V F b) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

V F c) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V F d) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

V F c) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V **F** b) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

V **F** c) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

V **F** d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

V **F** c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V **F** b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

V **F** c) Il rango di una matrice reale $m \times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

V **F** b) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

V **F** d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V F b) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

V F d) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F b) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V F c) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

V F d) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n \times n$ a traccia nulla.

V F b) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA{}^tB$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = I_n$ allora $BA = I_n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = -f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W = n$.

V F c) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

V F d) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

V F b) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

V F d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V F b) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

V F c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

V F d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale $m \times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V **F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V **F** c) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

V **F** b) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

V **F** c) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V **F** b) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

V **F** d) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** b) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V **F** d) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V **F** b) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

V **F** c) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

V **F** d) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** b) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

V **F** c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V **F** d) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

V **F** b) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

V **F** c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

V **F** d) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

V **F** b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V **F** d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

V **F** b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

V **F** c) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

V **F** d) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

V **F** b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W=\mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U+\dim W=n$.

V **F** c) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x)=-f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $(\mathbb{Z},+)$ è un gruppo commutativo.

V **F** b) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** c) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ è un anello commutativo.

V **F** d) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$, allora ${}^t(AB)={}^tA{}^tB$.

V **F** b) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ e $AB=I_n$ allora $BA=I_n$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n\times n$ a traccia nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice A ortogonale $n\times n$ con n dispari e $\det A>0$ ammette 1 come autovalore.

V **F** b) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

V **F** d) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f: V\to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

V **F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** c) Sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m\geq n$.

V **F** d) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V F c) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

V F d) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F c) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V F d) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim\ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

V **F** b) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

V **F** c) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V **F** b) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

V **F** c) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

V **F** d) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

V **F** c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

V **F** d) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

V **F** b) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

V **F** c) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V **F** d) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

V **F** b) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

V **F** d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \le |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

V **F** b) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

V **F** c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

V **F** c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = -f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W = n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = I_n$ allora $BA = I_n$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA{}^tB$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n \times n$ a traccia nulla.

V **F** d) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale $m \times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V **F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V **F** c) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V F b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

V F c) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

V F d) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V F b) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

V F c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

V F d) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F c) Sia $\| \cdot \|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

V **F** b) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

V **F** c) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** d) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V **F** b) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots , n\}$ ha cardinalità 2^n.

V **F** c) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V **F** d) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** b) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

V **F** c) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

V **F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ ha sempre grado n.

V F b) L'unica matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

V F d) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice triangolare $n \times n$ fa sempre n.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente 5 soluzioni.

V F b) Il rango di una matrice reale $m \times n$ è strettamente minore di n se e solo se ha almeno una colonna che è combinazione lineare delle rimanenti.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$.

V F c) L'applicazione $f : M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice in se stessa è lineare.

V F d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è suriettivo allora $g \circ f$ non è iniettivo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2, z = -t$ e $x = 2t, y = 8, z = -2t$ sono fra loro parallele nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 4 elementi e il gruppo $\mathbb{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

V F b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

V F c) L'insieme dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dispari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = -f(x)$) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W = n$.

V F d) Due spazi vettoriali reali che abbiano la stessa dimensione n sono necessariamente isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora AB è una matrice $n \times n$ a traccia nulla.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $AB = I_n$ allora $BA = I_n$.

V F c) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre sommare tra loro.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA{}^tB$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq 2\|\mathbf{u}\| + 3\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ hanno lo stesso complemento ortogonale, allora coincidono.

V F d) Ogni sottoinsieme ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

V F b) Il determinante è una funzione lineare dallo spazio delle matrici reali $n \times n$ a $\mathbb{R}$.

V F c) Se una matrice reale A possiede un minore di ordine k che ha determinante nullo allora il rango di A non può essere k.

V F d) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ha n autovalori distinti ha almeno una base spettrale.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è positiva.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere n.

V **F** d) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari e $\det A > 0$ ammette 1 come autovalore.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base.

V **F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a diagonale nulla ha dimensione infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

V **F** b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

V **F** c) L'inversa di una matrice diagonale invertibile è una matrice diagonale.

V **F** d) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ e AB è invertibile, allora A e B sono invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della norma indotta $\| \cdot \|$. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq |\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette almeno una base ortonormale.

V **F** c) Ogni insieme di vettori a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** d) Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso rango.

V **F** b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un omomorfismo iniettivo. Allora $m \geq n$.

V **F** c) La matrice di un cambiamento di base è sempre invertibile.

V **F** d) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia A una matrice associata a f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = r(A)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici $n \times n$ reali hanno rango n.

V **F** b) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ differiscono al più di una unità.

V **F** c) Esistono infiniti isomorfismi da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^n_1 A^n_1 + a^n_2 A^n_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V **F** b) Siano A, B matrici reali $n \times n$. Se AB è non invertibile allora anche BA è non invertibile.

V **F** c) L'unica matrice simile alla matrice identica $n \times n$ è la matrice identica $n \times n$.

V **F** d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità 2^n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + 2y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non si intersecano allora sono parallele.

V **F** c) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è commutativo.

V **F** d) Il determinante di ogni matrice ortogonale è positivo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono gruppi dotati di due elementi neutri distinti.

V **F** b) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

V **F** c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sono due anelli isomorfi.

V **F** d) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 contiene divisori dello zero.