Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

V **F** c) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

V **F** d) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

V **F** b) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n+1$ può essere linearmente indipendente.

V **F** c) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

V **F** b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** d) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V **F** b) Il rango di una matrice reale $m \times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V **F** c) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

V F b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

V F c) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

V F b) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V F c) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

V F d) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

V F b) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.

V F b) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F b) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.

V F c) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.

V F d) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

V **F** b) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

V **F** c) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V **F** d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

V **F** b) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V **F** c) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

V **F** b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V **F** c) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

V **F** b) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

V **F** c) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

V F b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F c) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

V F d) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

V F b) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F c) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

V F d) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora $A - B$ è una matrice reale $n \times n$ a traccia nulla.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A + B$ è la matrice nulla $n \times n$, allora anche $B + A$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili e $A^2 = (B^{-1})^2$, allora $B^2 = (A^{-1})^2$.

V F d) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F b) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

V F c) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

V F d) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

V F b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

V F c) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n+1$ può essere linearmente indipendente.

V F d) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.

V F b) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

V F d) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

V F c) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V F d) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

V F c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F d) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

V F b) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

V F c) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F c) Il rango di una matrice reale $m \times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V F d) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

V F b) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

V F d) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

V F d) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

V F d) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.

V **F** b) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.

V **F** c) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

V **F** b) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

V **F** c) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V **F** d) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V **F** c) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

V **F** d) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

V **F** b) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V **F** c) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

V **F** d) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.

V **F** b) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** c) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

V **F** d) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A + B$ è la matrice nulla $n \times n$, allora anche $B + A$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora $A - B$ è una matrice reale $n \times n$ a traccia nulla.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili e $A^2 = (B^{-1})^2$, allora $B^2 = (A^{-1})^2$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = n$.

V F b) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V F c) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

V F d) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W=\mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)=n$.

V **F** b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x)=f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ a traccia nulla, allora $A-B$ è una matrice reale $n\times n$ a traccia nulla.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ e $A+B$ è la matrice nulla $n\times n$, allora anche $B+A$ è la matrice nulla $n\times n$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ invertibili e $A^2=(B^{-1})^2$, allora $B^2=(A^{-1})^2$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.

V **F** b) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

V **F** c) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.

V **F** d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale $m\times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V **F** b) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V **F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V **F** d) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

V F b) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

V F c) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.

V F d) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V F b) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

V F c) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F c) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.

V F b) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F d) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

V F c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

V F b) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F c) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

V F b) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F c) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V F d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n+1$ può essere linearmente indipendente.

V F b) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

V F d) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

V F b) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

V F c) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

V F b) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

V F c) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V F d) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

V F d) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

V F c) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

V F d) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W=\mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)=n$.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x)=f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ e $A+B$ è la matrice nulla $n\times n$, allora anche $B+A$ è la matrice nulla $n\times n$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ invertibili e $A^2=(B^{-1})^2$, allora $B^2=(A^{-1})^2$.

V F c) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ a traccia nulla, allora $A-B$ è una matrice reale $n\times n$ a traccia nulla.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale $m\times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V F b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F c) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim\ker f<\dim \mathrm{Im}\, f$.

V F b) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) L'applicazione $f:M_{n,n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

V F d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g\circ f$ non è suriettivo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

V F c) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F d) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F b) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

V F c) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

V F c) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

V F d) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F c) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

V F d) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

V F b) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

V F c) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F d) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.
V **F** b) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.
V **F** c) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.
V **F** d) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
V **F** b) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.
V **F** c) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.
V **F** d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V **F** b) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.
V **F** c) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.
V **F** d) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.
V **F** b) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.
V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.
V **F** d) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.
V **F** b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.
V **F** c) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.
V **F** d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

V F b) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n+1$ può essere linearmente indipendente.

V F c) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

V F d) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F b) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V F c) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

V F d) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

V F b) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V F c) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

V F b) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V F c) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.
V **F** b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.
V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.
V **F** d) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.
V **F** b) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.
V **F** c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
V **F** d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.
V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.
V **F** c) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.
V **F** d) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.
V **F** b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.
V **F** c) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.
V **F** d) Il rango di una matrice reale $m \times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.
V **F** b) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
V **F** c) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.
V **F** d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

V F c) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

V F d) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V F b) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.

V F c) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n + 1$ può essere linearmente indipendente.

V F b) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

V F c) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

V F d) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

V F b) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

V F c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F d) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

V F b) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

V F c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili e $A^2 = (B^{-1})^2$, allora $B^2 = (A^{-1})^2$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora $A - B$ è una matrice reale $n \times n$ a traccia nulla.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A + B$ è la matrice nulla $n \times n$, allora anche $B + A$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F d) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

V F b) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F c) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V F d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

V F c) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

V F d) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

V F b) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

V F c) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V F d) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

V F d) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V F c) Il rango di una matrice reale $m \times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V F d) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

V F b) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

V F c) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V F d) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

V F c) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.

V F b) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

V F d) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

V F b) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F d) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.

V F b) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

V F c) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

V F b) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n + 1$ può essere linearmente indipendente.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F d) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

V **F** c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

V **F** b) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

V **F** c) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

V **F** d) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V **F** b) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

V **F** c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V **F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A + B$ è la matrice nulla $n \times n$, allora anche $B + A$ è la matrice nulla $n \times n$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili e $A^2 = (B^{-1})^2$, allora $B^2 = (A^{-1})^2$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora $A - B$ è una matrice reale $n \times n$ a traccia nulla.

V **F** d) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F b) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

V F c) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.

V F b) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.

V F c) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

V F c) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

V F d) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

V F b) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F c) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

V F d) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora $A - B$ è una matrice reale $n \times n$ a traccia nulla.

V F b) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A + B$ è la matrice nulla $n \times n$, allora anche $B + A$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili e $A^2 = (B^{-1})^2$, allora $B^2 = (A^{-1})^2$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F c) Il rango di una matrice reale $m \times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V F d) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F b) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

V F d) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

V F b) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

V F c) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V F d) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = n$.

V F c) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F b) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.

V F c) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.

V F b) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F d) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

V F b) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V F c) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

V **F** b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V **F** c) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

V **F** d) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** b) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

V **F** c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V **F** d) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

V **F** c) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n+1$ può essere linearmente indipendente.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

V **F** b) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.

V **F** c) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V **F** c) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

V **F** d) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

V **F** c) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** d) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** b) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V **F** c) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

V **F** d) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

V **F** b) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

V **F** c) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V **F** d) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

V **F** b) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V **F** c) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

V **F** d) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale $m \times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V **F** b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V **F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V **F** d) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

V **F** b) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V **F** d) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

V **F** b) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V **F** c) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.

V **F** d) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

V **F** c) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

V **F** d) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

V F d) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V F b) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

V F c) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

V F d) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

V F c) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

V F d) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = n$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

V F d) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora $A - B$ è una matrice reale $n \times n$ a traccia nulla.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili e $A^2 = (B^{-1})^2$, allora $B^2 = (A^{-1})^2$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A + B$ è la matrice nulla $n \times n$, allora anche $B + A$ è la matrice nulla $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.

V F b) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

V F b) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

V F c) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V F d) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

V F b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V F c) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

V F d) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

V F b) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n + 1$ può essere linearmente indipendente.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

V F d) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

V F b) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F c) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

V F d) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

V **F** c) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V **F** d) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

V **F** c) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V **F** d) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

V **F** b) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.

V **F** c) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

V **F** b) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** c) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.

V **F** d) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.

20 Febbraio 2017 N. di Matricola: 10101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.

V **F** b) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** c) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.

V **F** d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.

V **F** b) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** d) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

V **F** b) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

V **F** c) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V **F** d) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

V **F** c) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

V **F** d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.

V F c) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n+1$ può essere linearmente indipendente.

V F b) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

V F c) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V F b) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F c) Il rango di una matrice reale $m \times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

V F b) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F c) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

V F d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

V **F** c) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

V **F** b) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** c) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

V **F** d) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V **F** b) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

V **F** c) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

V **F** d) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V **F** b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** c) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora $A - B$ è una matrice reale $n \times n$ a traccia nulla.

V **F** b) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili e $A^2 = (B^{-1})^2$, allora $B^2 = (A^{-1})^2$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A + B$ è la matrice nulla $n \times n$, allora anche $B + A$ è la matrice nulla $n \times n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = n$.

V **F** c) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

V **F** d) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

V **F** b) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** c) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

V **F** d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

V **F** b) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

V **F** c) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

V **F** d) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V **F** b) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

V **F** c) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale $m \times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V F b) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V F c) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

V F b) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

V F c) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V F d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

V F b) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

V F d) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

V F d) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V F b) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

V F c) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

V F d) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F b) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

V F c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F d) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.

V F b) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

V F b) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

V F d) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n + 1$ può essere linearmente indipendente.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

V F b) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

V F d) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

V F b) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W=\mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)=n$.

V F c) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x)=f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $(\mathbb{N},+)$ è un gruppo commutativo.

V F b) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F d) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ invertibili e $A^2=(B^{-1})^2$, allora $B^2=(A^{-1})^2$.

V F b) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ e $A+B$ è la matrice nulla $n\times n$, allora anche $B+A$ è la matrice nulla $n\times n$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ a traccia nulla, allora $A-B$ è una matrice reale $n\times n$ a traccia nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice A ortogonale $n\times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V F b) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

V F d) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

V F b) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

V F c) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F d) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V F c) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

V F d) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.

V F b) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F c) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.

V F d) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

V F b) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V F c) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

V F d) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

V **F** b) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

V **F** c) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V **F** d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V **F** b) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

V **F** c) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

V **F** d) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

V **F** c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V **F** d) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V **F** b) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

V **F** c) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

V **F** d) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.

V F b) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V F c) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

V F d) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.

V F b) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.

V F c) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U + W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A + B$ è la matrice nulla $n \times n$, allora anche $B + A$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili e $A^2 = (B^{-1})^2$, allora $B^2 = (A^{-1})^2$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora $A - B$ è una matrice reale $n \times n$ a traccia nulla.

V F d) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale $m \times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V F b) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V F c) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n+1$ può essere linearmente indipendente.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

V **F** c) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

V **F** d) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V **F** b) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

V **F** d) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** b) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** d) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F c) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

V F d) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

V F b) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

V F c) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V F b) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

V F c) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F d) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V F c) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

V F b) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

V F c) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

V F d) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Per ogni polinomio p a coefficienti reali in una variabile esiste una matrice reale quadrata A tale che p sia il polinomio caratteristico di A.

V **F** b) L'unica matrice reale simmetrica 4×4 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

V **F** c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V **F** d) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di una matrice reale $n \times n$ fa sempre n.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono sistemi lineari che hanno esattamente una soluzione.

V **F** b) Il rango di una matrice reale $m \times n$ A è strettamente minore di m se e solo se A ha almeno una riga che è combinazione lineare delle righe rimanenti.

V **F** c) Un sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se la sua matrice completa ha lo stesso rango della sua matrice incompleta.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'immagine di una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

V **F** b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora f è invertibile se e solo se $\dim \ker f < \dim \operatorname{Im} f$.

V **F** c) L'applicazione $f : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice nella sua traccia è lineare.

V **F** d) Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Se f non è iniettivo allora $g \circ f$ non è suriettivo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esiste una e una sola isometria da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

V **F** b) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t, z = 3t$ e $x = 3t, y = 2t, z = t$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** c) $(1, 0, 0) \wedge (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

V **F** d) La composizione di due isometrie di $\mathbb{R}^3$ è sempre una isometria di $\mathbb{R}^3$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a uno stesso gruppo H, allora sono anche fra loro isomorfi.

V F b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

V F c) L'insieme delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo commutativo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ pari (verificanti cioè l'uguaglianza $f(-x) = f(x)$) è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $U+W = \mathbb{R}^n$ se e solo se $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = n$.

V F d) Due spazi vettoriali reali fra loro isomorfi hanno sempre dimensioni uguali tra loro.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla, allora $A - B$ è una matrice reale $n \times n$ a traccia nulla.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A + B$ è la matrice nulla $n \times n$, allora anche $B + A$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F c) Due matrici reali qualunque A e B si possono sempre moltiplicare tra loro tramite l'usuale prodotto righe per colonne.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili e $A^2 = (B^{-1})^2$, allora $B^2 = (A^{-1})^2$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sono fra loro ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

V F b) In ogni spazio vettoriale euclideo esistono vettori di norma negativa.

V F c) Se due sottospazi vettoriali euclidei U, V di $\mathbb{R}^n$ hanno complementi ortogonali dotati della stessa dimensione, allora U e V sono fra loro isomorfi.

V F d) Ogni sottoinsieme ortogonale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ può essere completato a una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice quadrata reale, allora $\det(A^2) = (\det A)^2$.

V F b) La matrice identica I_n è l'unica matrice reale $n \times n$ avente determinante 1.

V F c) Se tutti i minori di ordine k di una matrice reale A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di k.

V F d) Ogni matrice associata a un isomorfismo è quadrata e invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che ammette un autovalore di molteplicità algebrica n ha almeno una base spettrale.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ può essere strettamente superiore a n.

V **F** d) Ogni matrice A ortogonale $n \times n$ con n dispari ammette 1 come autovalore.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che abbia cardinalità $n+1$ può essere linearmente indipendente.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione finita e positiva ammette un numero infinito di basi fra loro distinte.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale contenente un numero infinito di elementi ha dimensione infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice quadrata reale A è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** b) Se A e B sono matrici reali $n \times n$, allora $AB = BA$.

V **F** c) Tutte le matrici ortogonali sono invertibili.

V **F** d) Se A e B sono matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A + B$ è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni norma su uno spazio vettoriale euclideo V è una funzione lineare da V a $\mathbb{R}$.

V **F** b) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}$ ammette esattamente due basi ortonormali.

V **F** c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

V **F** d) $\mathbb{R}^n$ ammette uno e un solo prodotto scalare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici fra loro simili contengono sempre lo stesso numero di zeri.

V **F** b) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V **F** c) La matrice di un cambiamento di base può avere determinante nullo.

V **F** d) Sia A una matrice $m \times n$ associata a un endomorfismo f. Allora $\dim \operatorname{Im} f = \max(m, n)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici $n \times n$ reali con determinante uguale a 1 hanno lo stesso rango.

V F b) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Allora i ranghi della matrice completa e della matrice incompleta di $\mathcal{S}$ sono sempre uguali tra loro.

V F c) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali 4×4 (dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare) e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle soluzioni comuni a due sistemi lineari in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se possiede due righe uguali.

V F b) Sia D una matrice diagonale reale tale che D^2 abbia traccia nulla. Allora D è non invertibile.

V F c) L'unica matrice simile alla matrice nulla $n \times n$ è la matrice nulla $n \times n$.

V F d) L'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$ ha cardinalità $n!$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F b) Esiste almeno una coppia di rette di $\mathbb{R}^3$ che sono fra loro parallele e sghembe allo stesso tempo.

V F c) Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è associativo.

V F d) La matrice $2I_n$ è una matrice ortogonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono gruppi dotati di un elemento che ammette due inversi distinti.

V F b) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un anello con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_{10}$ delle classi di resto modulo 10 contiene divisori dello zero.