

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.
V F b) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
V F c) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F d) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.
V F b) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
V F c) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
V F b) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
V F c) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
V F b) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
V F c) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.
V F d) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.
V F b) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
V F c) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.
V F d) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.
- V F** b) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.
- V F** d) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .
- V F** b) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
- V F** c) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .
- V F** b) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
- V F** c) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** c) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
- V F** d) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
V F c) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
V F d) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^tA)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.
V F b) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .
V F c) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .
V F d) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.
V F b) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
V F c) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
V F d) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.
V F b) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.
V F c) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .
- V F** c) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.
- V F** d) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
- V F** c) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** d) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
- V F** b) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.
- V F** c) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
- V F** c) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.
- V F** d) Non esistono matrici triangolari simmetriche.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.
- V F** b) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.
- V F** c) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
V F b) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.
V F c) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
V F d) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .
V F b) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.
V F c) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
V F d) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.
V F c) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
V F d) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.
V F d) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.
V F b) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
V F c) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
V F d) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.
- V F** b) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.
- V F** c) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** b) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
- V F** c) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.
- V F** d) Ogni prodotto scalare è anche una norma.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** b) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .
- V F** c) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.
- V F** d) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.
- V F** c) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
- V F** d) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** b) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
- V F** c) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$.
- V F** b) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.
- V F** d) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
- V F** b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
- V F** c) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** d) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^tA)$.
- V F** b) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** d) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
- V F** b) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.
- V F** d) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
- V F** b) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** c) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici triangolari simmetriche.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
- V F** c) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.
- V F** d) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.
- V F** b) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .
- V F** c) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .
- V F** b) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
- V F** c) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.
- V F** d) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.
V F b) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .
V F d) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici triangolari simmetriche.
V F b) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
V F d) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
V F b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.
V F c) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .
V F d) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
V F b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
V F c) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.
V F d) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
V F b) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.
V F c) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .
V F d) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
V F b) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.
V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
V F b) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.
V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .
V F d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
V F b) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.
V F d) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
V F b) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
V F c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
V F d) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F b) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.
V F c) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.
V F d) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
V F b) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F c) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
V F d) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^tA)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
V F b) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.
V F d) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
V F b) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F c) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.
V F d) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
V F b) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.
V F c) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
V F d) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .
V F b) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
V F c) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .
V F d) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.
V F b) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.
V F c) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
V F b) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
V F c) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.
V F b) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
V F c) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
V F d) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .
V F b) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.
V F c) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.
V F d) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
V F b) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.
V F c) Non esistono matrici triangolari simmetriche.
V F d) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
V F b) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.
V F c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
V F d) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
V F b) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.
V F c) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.
V F d) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
V F b) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.
V F c) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .
V F d) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
V F b) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F c) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
V F d) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.
V F c) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.
V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.
V F b) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.
V F c) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.
V F b) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.
V F c) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
V F d) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
V F b) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \text{Im } f = n - \dim \ker f$.
V F d) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
V F b) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
V F c) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .
V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.
V F b) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
V F c) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F d) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
V F b) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.
V F d) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
V F b) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.
V F d) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.
V F b) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
V F c) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
V F d) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F b) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
V F c) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^tA)$.
V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.
V F b) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .
V F d) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
V F b) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .
V F d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.
V F c) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
V F d) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
V F b) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .
V F c) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.
V F c) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
V F d) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.
V F b) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.
V F c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
V F d) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .
V F b) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.
V F c) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.
V F d) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.
V F c) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.
V F d) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .
V F c) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
V F d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
V F b) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F c) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F d) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
V F b) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
V F c) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
- V F** b) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
- V F** c) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.
- V F** d) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.
- V F** c) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.
- V F** d) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.
- V F** b) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .
- V F** d) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
- V F** d) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.
- V F** b) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
- V F** d) Non esistono matrici triangolari simmetriche.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** b) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** c) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** d) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^tA)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.
- V F** b) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
- V F** c) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.
- V F** b) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.
- V F** c) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
- V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .
- V F** b) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .
- V F** c) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.
- V F** d) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.
- V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
- V F** c) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** d) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.
- V F** b) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.
- V F** c) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.
- V F** b) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** c) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.
- V F** d) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .
- V F** b) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.
- V F** c) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
- V F** d) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.
V F b) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
V F c) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
V F d) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
V F b) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .
V F c) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .
V F d) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F b) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F c) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
V F d) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
V F b) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
V F d) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.
V F b) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
V F c) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
V F d) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .
V F b) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.
V F c) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
V F b) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F c) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^tA)$.
V F d) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .
V F c) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.
V F d) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
V F b) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.
V F c) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.
V F d) Non esistono matrici triangolari simmetriche.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
V F b) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F c) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
V F d) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
V F b) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .
V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.
V F d) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.
V F b) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$.
V F d) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.
V F b) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.
V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .
V F d) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.
V F c) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
V F d) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.
- V F** b) Non esistono matrici triangolari simmetriche.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
- V F** d) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.
- V F** b) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.
- V F** c) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.
- V F** b) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .
- V F** c) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
- V F** d) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.
- V F** b) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.
- V F** c) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
- V F** d) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.
- V F** c) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .
- V F** d) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** b) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
- V F** c) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .
- V F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
- V F** b) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.
- V F** d) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** b) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
- V F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .
- V F** d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** b) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
- V F** c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
- V F** d) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.
V F b) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
V F c) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.
V F d) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.
V F b) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.
V F c) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F b) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
V F c) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
V F d) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F b) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F c) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
V F d) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .
- V F** b) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
- V F** c) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.
- V F** d) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.
- V F** c) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
- V F** d) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .
- V F** c) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.
- V F** d) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$.
- V F** b) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.
- V F** d) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^tA)$.
- V F** b) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** d) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** b) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.
- V F** c) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.
- V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.
- V F** c) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.
- V F** d) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.
- V F** c) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .
- V F** d) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
- V F** b) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** c) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.
- V F** d) Ogni prodotto scalare è anche una norma.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .
V F b) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
V F c) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.
V F d) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.
V F c) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.
V F d) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
V F b) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
V F c) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F d) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.
V F b) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.
V F d) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici triangolari simmetriche.
V F b) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.
V F c) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
- V F** c) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.
- V F** d) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^tA)$.
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** c) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** d) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.
- V F** b) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
- V F** c) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
- V F** b) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
- V F** c) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.
- V F** d) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$.
- V F** b) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.
- V F** c) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .
- V F** b) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.
- V F** c) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
- V F** d) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** b) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** c) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
- V F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
- V F** c) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.
- V F** b) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** c) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
- V F** d) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
V F b) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
V F c) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .
V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
V F b) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.
V F d) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.
V F c) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
V F d) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.
V F c) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
V F b) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .
V F d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
V F b) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F c) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F d) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
V F b) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
V F c) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
V F b) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.
V F c) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
V F d) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.
V F b) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.
V F c) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
V F d) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
- V F** b) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.
- V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .
- V F** d) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** b) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
- V F** c) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** d) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** b) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** c) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^tA)$.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .
- V F** b) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** c) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .
- V F** d) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.
- V F** b) Non esistono matrici triangolari simmetriche.
- V F** c) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.
- V F** c) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.
- V F** d) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.
- V F** b) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.
- V F** c) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
- V F** c) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$.
- V F** d) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
- V F** b) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** c) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
- V F** d) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
- V F** c) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.
- V F** d) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
- V F** b) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.
- V F** c) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.
- V F** d) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** b) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
- V F** c) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.
- V F** d) Ogni prodotto scalare è anche una norma.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** b) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .
- V F** c) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.
- V F** d) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
- V F** b) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.
- V F** d) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.
- V F** b) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** c) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.
- V F** d) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** c) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.
- V F** d) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
- V F** b) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.
- V F** d) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** c) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
- V F** d) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.
- V F** b) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.
- V F** c) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .
- V F** d) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
- V F** c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
- V F** d) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.
- V F** b) Non esistono matrici triangolari simmetriche.
- V F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
- V F** d) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
- V F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .
- V F** c) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$.
- V F** b) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.
- V F** d) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .
- V F** b) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
- V F** c) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.
- V F** d) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
- V F** b) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .
- V F** c) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x+y-z=2$ e $x-y-z=3$ non sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
- V F** d) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A+A) = \det(A+{}^tA)$.
- V F** b) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** d) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
V F b) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.
V F c) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.
V F d) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
V F b) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.
V F d) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.
V F b) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
V F c) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.
V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
V F b) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F c) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
V F d) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.
V F b) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.
V F d) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** b) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
- V F** c) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** d) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .
- V F** b) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.
- V F** c) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
- V F** b) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.
- V F** c) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.
- V F** d) Non esistono matrici triangolari simmetriche.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
- V F** c) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.
- V F** d) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
V F b) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.
V F c) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
V F b) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.
V F c) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
V F d) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .
V F c) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.
V F d) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
V F b) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
V F c) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.
- V F** b) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
- V F** c) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** d) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.
- V F** c) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.
- V F** d) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** b) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^t A)$.
- V F** c) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .
- V F** b) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .
- V F** c) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \operatorname{ker} f$.
- V F** c) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
- V F** d) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il polinomio caratteristico del prodotto di due matrici reali $n \times n$ non può mai coincidere col prodotto dei loro polinomi caratteristici.
- V F** b) Esistono matrici triangolari diagonalizzabili.
- V F** c) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ha determinante nullo.
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite ammette soluzione.
- V F** b) In un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
- V F** d) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite la cui matrice completa abbia rango n ammette soluzione.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano f e g due trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Se f e g coincidono su una base di \mathbb{R}^n allora coincidono ovunque.
- V F** b) Non esistono applicazioni lineari suriettive da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .
- V F** c) La funzione nulla da \mathbb{R} a \mathbb{R} è una trasformazione lineare.
- V F** d) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano dati in \mathbb{R}^3 un punto P e un piano π . Esiste allora una e una sola retta per P parallela a π .
- V F** b) La relazione di parallelismo fra piani di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Se due vettori di \mathbb{R}^3 sono uno il multiplo dell'altro, allora il loro prodotto vettoriale è nullo.
- V F** d) La composizione di due isometrie di \mathbb{R}^n è sempre una isometria di \mathbb{R}^n .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
- V F** c) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
- V F** d) \mathbb{N} non è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Non esistono sottoinsiemi linearmente dipendenti di \mathbb{R}^n che siano basi di \mathbb{R}^n .
- V F** c) Due sistemi di generatori per \mathbb{R}^n hanno sempre la stessa cardinalità.
- V F** d) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è linearmente indipendente.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici reali 3×4 si possono sempre moltiplicare tra loro secondo il prodotto righe per colonne.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
- V F** c) Non esistono matrici triangolari simmetriche.
- V F** d) Per ogni matrice quadrata reale A con $\det A = 0$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
- V F** b) Una norma su \mathbb{R}^n non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** c) Sia U un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione finita. Allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$.
- V F** d) Due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n sono fra loro ortogonali se e solo se $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det AB = \det BA$.
- V F** b) Il determinante di una matrice triangolare è sempre non nullo.
- V F** c) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno due righe fra loro uguali.
- V F** d) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è non invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di \mathbb{R}^n non può mai essere strettamente maggiore di n .
- V F** b) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** c) Esistono infiniti endomorfismi di \mathbb{R}^7 il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale $n \times n$ con n dispari che non ammette 1 come autovalore ha determinante negativo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni f da \mathbb{R} a \mathbb{R} tali che $f(2) = 1$ è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
- V F** c) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 ammette infinite basi distinte.
- V F** d) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 3×3 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** b) Non esistono matrici invertibili a traccia nulla.
- V F** c) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua opposta è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste un solo prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^5 .
- V F** b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.
- V F** c) In \mathbb{R}^9 esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** d) Ogni base ortonormale è anche ortogonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Ogni endomorfismo suriettivo di \mathbb{R}^n è anche iniettivo.
- V F** c) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
- V F** d) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra m e n .
- V F** b) Esistono esempi di trasformazioni lineari per le quali nucleo e immagine hanno la stessa dimensione.
- V F** c) Il rango di una matrice reale non può mai essere un numero negativo.
- V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^8 .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** c) Esistono matrici A, B reali $n \times n$ tali che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** d) Per ogni matrice quadrata reale A si ha che $\det(A + A) = \det(A + {}^tA)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$ non sono fra loro ortogonali.
- V F** b) L'ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
- V F** d) Un endomorfismo f di \mathbb{R}^n è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di f rispetto alla base canonica è simmetrica.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) Tutti i gruppi commutativi hanno infiniti elementi.
- V F** c) Tutti gli anelli $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo sono fra loro isomorfi.
- V F** d) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.