Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni anello commutativo è un campo.

V **F** b) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V **F** c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

V **F** b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V **F** c) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V **F** b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V **F** c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

V **F** d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F d) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F c) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F b) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

V **F** b) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n\times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1A^1_1 + a^2_2A^2_2 + \ldots + a^n_nA^n_n$.

V **F** d) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

V **F** b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

V **F** c) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** d) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots , \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \ldots , -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

V **F** b) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

V **F** b) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

V **F** c) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V **F** d) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

V F b) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F b) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

V F c) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

V F b) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

V F c) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

V F b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

V F b) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

V F b) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

V F c) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

V F d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

V F b) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V F d) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

V F d) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

V F b) Ogni anello commutativo è un campo.

V F c) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

17 Luglio 2017 N. di Matricola: 01000

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V **F** b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathrm{Im}\, f$.

V **F** b) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V **F** c) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

V **F** d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V **F** c) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

V **F** d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V **F** c) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V **F** d) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F b) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

V F c) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

V F d) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

V F b) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

V F b) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V F c) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

V F d) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F b) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

V F c) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

V F d) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

V F c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F c) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

V F d) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

V F d) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

V F c) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F d) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V F b) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

V F b) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

V F c) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F b) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n\times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F d) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Ogni anello commutativo è un campo.

V F d) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

V F b) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

V F c) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V F d) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V F b) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

V F c) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

V F d) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F c) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathrm{Im}\, f$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

V F b) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F d) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

V F c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

V **F** c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

V **F** d) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V **F** b) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** c) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

V **F** d) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

V **F** d) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

V **F** b) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

V **F** c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** d) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** b) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \ldots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

V **F** c) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F b) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V F c) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di Im f.

V F d) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

V F b) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni anello commutativo è un campo.

V F b) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V F c) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

V **F** b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

V **F** d) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

V **F** d) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n\times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V **F** c) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

V **F** d) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

V **F** b) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V **F** c) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

V **F** d) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

V **F** b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V **F** c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V **F** d) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V F b) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

V F c) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

V F d) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F d) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

V **F** b) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

V **F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

V **F** d) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

V **F** d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V **F** b) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V **F** c) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

V **F** d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V **F** b) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

V **F** c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Ogni anello commutativo è un campo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

V **F** c) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V **F** d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

V F b) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

V F c) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

V F b) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

V F c) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F b) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n\times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F d) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F c) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

V F b) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

V F c) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V F d) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

V F d) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F d) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

V F b) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

V F c) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

V F c) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \ldots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F b) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V F d) Ogni anello commutativo è un campo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

V F b) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

V F b) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

V F c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V F d) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

V **F** c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V **F** b) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

V **F** c) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

V **F** d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n\times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1A^1_1 + a^2_2A^2_2 + \ldots + a^n_nA^n_n$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V **F** b) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V **F** c) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V **F** d) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

V **F** b) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

V **F** c) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F c) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di Im f.

V F d) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

V F b) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

V F c) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

V F d) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V F c) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

V F d) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

V F b) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F b) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

V F c) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

V F b) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

V F b) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

V F d) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

V F b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

V F d) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F b) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

V F c) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V F d) Ogni anello commutativo è un campo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

V **F** b) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V **F** c) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

V **F** d) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

V **F** c) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V **F** d) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

V **F** c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

V **F** d) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di Im f.

V **F** b) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V **F** c) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

V **F** d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V **F** c) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V **F** d) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V **F** b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

V **F** c) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

V **F** d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

V **F** b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

V **F** c) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

V **F** d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

V **F** c) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

V **F** d) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

V **F** d) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F c) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

V F d) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

V F b) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

V F d) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F b) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

V F c) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

V F d) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

V **F** b) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V **F** c) Ogni anello commutativo è un campo.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

V **F** b) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V **F** c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V **F** d) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

V **F** b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V **F** c) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

V **F** d) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di Im f.

V F b) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

V F c) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

V F b) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

V F c) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V F d) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F b) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

V F c) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F d) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

V F c) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

V **F** c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V **F** d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V **F** b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

V **F** c) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

V **F** d) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V **F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V **F** d) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

V F c) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V F b) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Ogni anello commutativo è un campo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

V F c) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

V F c) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

V F b) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V F b) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

V F c) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

V F d) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

V F c) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F b) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

V F c) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

V F d) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V F c) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V F d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V F c) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

V F d) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

V F c) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U+W)$.

V F d) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

V F c) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

V F d) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F c) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$.

V F d) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

V F d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

V F c) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

V F d) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** b) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

V **F** d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n\times n$ considerata.

V **F** b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n\times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V **F** d) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

V **F** b) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

V **F** c) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

V **F** d) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

V **F** b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Ogni anello commutativo è un campo.

V **F** d) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

V **F** b) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V **F** c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

V **F** b) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

V **F** c) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

V **F** d) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

V F b) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

V F c) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F d) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F c) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

V F d) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F c) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di Im f.

V F b) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V F c) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

V F b) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V F c) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

V F d) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

V F d) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F c) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F d) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

V F c) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F b) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F d) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

V F b) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F b) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

V F c) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

V F d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v}\rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

V F b) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F c) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Se $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

V F b) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

V F c) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F c) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

V F d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V **F** b) Ogni anello commutativo è un campo.

V **F** c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V **F** b) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

V **F** c) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

V **F** d) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V **F** b) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

V **F** c) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

V **F** b) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V **F** d) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

V **F** b) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

V **F** d) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V **F** b) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

V **F** c) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

V **F** d) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

V **F** b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

V **F** c) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** d) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V **F** b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathrm{Im}\, f$.

V **F** c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V **F** d) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ il cui polinomio caratteristico non ammette radici reali.

V **F** c) Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se f non è un isomorfismo.

V **F** d) Se λ è un autovalore di una matrice quadrata reale A, allora 3λ è un autovalore di $3A$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è una soluzione del medesimo sistema lineare omogeneo.

V **F** b) Il rango di una matrice è uguale al numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta per righe.

V **F** c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V **F** d) Il numero di soluzioni di un sistema lineare è sempre inferiore al numero delle sue equazioni.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il nucleo di un isomorfismo $f : U \to W$ fra due spazi vettoriali U, W di dimensione finita contiene solo il vettore nullo di U.

V **F** b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, anche $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z, u) = (u, z, y, x)$ per ogni $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ è lineare.

V **F** d) Non esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ suriettive.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non hanno punti in comune e non sono sghembe, allora sono parallele.

V **F** b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = t$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 5$ sono fra loro ortogonali nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)).

V **F** c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali. Allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è il vettore nullo.

V **F** d) $\mathbb{R}^9$ ammette infiniti sistemi di riferimento cartesiano ortogonale distinti.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La relazione di isomorfismo fra gruppi è una relazione di equivalenza.

V F b) L'insieme dei numeri reali strettamente positivi è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F c) L'anello $\mathbb{Z}_9$ delle classi di resto modulo 9 è un campo.

V F d) L'insieme delle permutazioni su 10 oggetti è un gruppo commutativo rispetto all'usuale composizione.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni base di $\mathbb{R}^n$ è anche un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di uno spazio vettoriale reale V, per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

V F d) Se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V finitamente generato, allora $\dim U + \dim W \geq \dim(U + W)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Gli elementi della diagonale di una matrice reale antisimmetrica sono sempre tutti nulli.

V F b) Il rango di una matrice reale coincide sempre con la dimensione dello spazio generato dalle sue colonne.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F d) L'usuale prodotto righe per colonne fra matrici $n \times n$ è associativo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A è una matrice ortogonale $n \times n$ la funzione che porta ogni vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nel vettore colonna $A\mathbf{x}$ è una isometria dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma in uno spazio vettoriale euclideo V. Si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V, allora anche $(-\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V.

V F d) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non ammettono basi ortonormali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe della matrice $n \times n$ considerata.

V F c) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A^i_j$.

V F d) Ogni minore 2×2 di una matrice reale 5×5 ammette esattamente 3 orlati.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice simmetrica rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V **F** c) Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano rispettivamente $ma(\lambda)$ e $mg(\lambda)$ la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ. Allora $ma(\lambda) \geq mg(\lambda)$.

V **F** d) Se λ è un autovalore di un endomorfismo invertibile f di $\mathbb{R}^n$, allora λ^{-1} è un autovalore dell'endomorfismo f^{-1}.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme di tutti i polinomi reali nella variabile x di grado 7 è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale reale dei polinomi reali nella variabile x.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ costituito da n vettori di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici reali 3×3.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre una matrice $n \times n$ invertibile.

V **F** b) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A^{2017} è una matrice reale simmetrica.

V **F** c) Tutte le matrici 2×2 non nulle sono invertibili.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali simmetriche, allora $AB = BA$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Sia V uno spazio vettoriale euclideo dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ha che $\langle 3\mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle = \langle 12\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$.

V **F** b) Il complemento ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale euclideo di dimensione 4 dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$ ha dimensione 1.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ ammette infinite basi ortonormali fra loro distinte.

V **F** d) 0 è autovalore di ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ manda il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$.

V F b) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare.

V F c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato V. Allora $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_V) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(id_V)$.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di Im f.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sistema lineare reale di 3 equazioni in 4 incognite ammette almeno una soluzione, allora ne ammette infinite.

V F b) Tutti i sistemi lineari ammettono almeno una soluzione.

V F c) Esistono esattamente 4 isomorfismi da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

V F d) La forma ridotta a gradini di una matrice reale A è sempre unica.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice reale $n \times n$ con $n \geq 2$ e sia A^i_j il complemento algebrico dell'elemento a^i_j. Allora $\det A = a^1_1 A^1_1 + a^2_2 A^2_2 + \ldots + a^n_n A^n_n$.

V F b) Se A è una matrice reale allora A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango.

V F c) L'unica matrice 2×2 che ha determinante uguale a 1 e traccia uguale a 2 è la matrice identità 2×2.

V F d) L'inversa di una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ è sempre una permutazione dispari sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $y = 0$ e $y = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Siano r e r' due rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettivi vettori direttori $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$. Allora r e r' sono fra loro parallele.

V F c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Rispetto allo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ (espresso nelle coordinate (x, y, z)) l'equazione cartesiana $x - y = 0$ rappresenta un piano.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) La composizione di due funzioni suriettive da un insieme a se stesso è sempre suriettiva.

V F c) Ogni anello commutativo è un campo.

V F d) Tutti i gruppi con esattamente due elementi sono commutativi.