

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .
- V F** d) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.
- V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.
- V F** d) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^tA) = A$ .
- V F** b) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.
- V F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.
- V F** c) Il rango è un'applicazione lineare.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** b) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .
- V F** c) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.
- V F** d) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .  
**V F** c) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.  
**V F** d) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora  $0$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.  
**V F** b) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .  
**V F** c) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è  $1$ , allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è  $1$ .  
**V F** d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .  
**V F** b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** c) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .  
**V F** d) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.  
**V F** b) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** c) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .  
**V F** d) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area  $1$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.  
**V F** b) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.  
**V F** c) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.  
**V F** d) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.  
**V F** b) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.  
**V F** c) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.  
**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.  
**V F** b) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.  
**V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** d) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .
- V F** c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.
- V F** d) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.
- V F** b) Ogni gruppo è commutativo.
- V F** c) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .
- V F** d) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .
- V F** b) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** c) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.
- V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- V F** b) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** c) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .
- V F** d) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.
- V F** c) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.
- V F** d) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** b) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.  
**V F** c) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.  
**V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.  
**V F** b) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.  
**V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .  
**V F** d) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.  
**V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .  
**V F** b) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.  
**V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.  
**V F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^t A) = A$ .  
**V F** c) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .  
**V F** b) Il rango è un'applicazione lineare.  
**V F** c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.  
**V F** d) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .  
**V F** b) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.  
**V F** c) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.  
**V F** d) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.  
**V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.  
**V F** c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** b) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .
- V F** c) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area 1.
- V F** d) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .
- V F** b) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.
- V F** c) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** d) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.
- V F** b) Ogni gruppo è commutativo.
- V F** c) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.
- V F** d) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .
- V F** c) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** b) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .
- V F** c) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** d) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .
- V F** b) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è 1, allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è 1.
- V F** c) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.
- V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.
- V F** b) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- V F** d) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .
- V F** c) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.
- V F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.
- V F** d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .
- V F** d) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- V F** c) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** d) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** b) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** c) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .
- V F** d) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.
- V F** b) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.
- V F** c) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .
- V F** d) Il rango è un'applicazione lineare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .
- V F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** c) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.
- V F** d) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .
- V F** c) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .
- V F** b) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.
- V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora  $0$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.
- V F** d) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è  $1$ , allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è  $1$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area  $1$ .
- V F** c) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.
- V F** d) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.
- V F** b) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità  $64$ .
- V F** c) Ogni gruppo è commutativo.
- V F** d) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.  
**V F** b) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .  
**V F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.  
**V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.  
**V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.  
**V F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.  
**V F** c) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.  
**V F** d) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .  
**V F** c) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** d) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.  
**V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .  
**V F** c) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.  
**V F** d) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.
- V F** b) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.
- V F** c) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.
- V F** d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.
- V F** b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.
- V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^tA) = A$ .
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** b) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .
- V F** c) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.
- V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .
- V F** b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.
- V F** c) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** d) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** b) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .
- V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.
- V F** b) Il rango è un'applicazione lineare.
- V F** c) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .
- V F** b) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.
- V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** d) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.
- V F** b) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.
- V F** d) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni gruppo è commutativo.  
**V F** b) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .  
**V F** c) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.  
**V F** d) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .  
**V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .  
**V F** d) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .  
**V F** b) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.  
**V F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.  
**V F** d) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .  
**V F** b) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.  
**V F** c) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.  
**V F** d) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .
- V F** b) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.
- V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .
- V F** d) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .
- V F** b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** c) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .
- V F** d) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** c) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .
- V F** b) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.
- V F** d) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area 1.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^tA) = A$ .  
**V F** b) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.  
**V F** b) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.  
**V F** c) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .  
**V F** d) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.  
**V F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** c) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.  
**V F** d) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è 1, allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è 1.  
**V F** b) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .  
**V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.  
**V F** d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^tA) = A$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** b) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .  
**V F** c) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .  
**V F** d) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.  
**V F** c) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .  
**V F** d) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .  
**V F** b) Il rango è un'applicazione lineare.  
**V F** c) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.  
**V F** d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.  
**V F** b) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.  
**V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .  
**V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.
- V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .
- V F** b) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora  $0$  è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.
- V F** c) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è  $1$ , allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è  $1$ .
- V F** d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** b) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .
- V F** d) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità  $7$ .
- V F** b) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.
- V F** b) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
- V F** c) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
- V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.
- V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.
- V F** d) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .
- V F** d) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .
- V F** b) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.
- V F** c) Ogni gruppo è commutativo.
- V F** d) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .  
**V F** c) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.  
**V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .  
**V F** b) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .  
**V F** c) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.  
**V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.  
**V F** b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.  
**V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** d) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.  
**V F** b) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.  
**V F** c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .  
**V F** b) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.  
**V F** c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.  
**V F** d) Il rango è un'applicazione lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .  
**V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .  
**V F** b) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.  
**V F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.  
**V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.  
**V F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .  
**V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .  
**V F** d) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .  
**V F** b) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.  
**V F** c) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.  
**V F** d) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.
- V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.
- V F** c) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.
- V F** d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .
- V F** c) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** d) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.
- V F** c) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.
- V F** c) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^tA) = A$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .
- V F** b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.
- V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .
- V F** b) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.
- V F** c) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.
- V F** d) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è 1, allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** b) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- V F** d) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni gruppo è commutativo.  
**V F** b) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .  
**V F** c) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.  
**V F** d) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** b) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .  
**V F** c) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** d) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .  
**V F** b) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .  
**V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .  
**V F** d) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.  
**V F** b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.  
**V F** c) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.  
**V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.  
**V F** c) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area 1.  
**V F** d) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.  
**V F** c) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.  
**V F** d) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango è un'applicazione lineare.  
**V F** b) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .  
**V F** c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.  
**V F** d) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.  
**V F** b) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.  
**V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .  
**V F** d) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.  
**V F** b) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.  
**V F** b) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** c) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .  
**V F** d) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .  
**V F** b) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** c) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .  
**V F** d) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .  
**V F** b) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** c) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.  
**V F** d) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è 1, allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è 1.  
**V F** b) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .  
**V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.  
**V F** d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.  
**V F** b) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.  
**V F** c) Ogni gruppo è commutativo.  
**V F** d) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** b) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
- V F** c) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
- V F** d) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.
- V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.
- V F** d) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.
- V F** b) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** c) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .
- V F** b) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** c) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** d) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.  
**V F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** c) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.  
**V F** d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .  
**V F** c) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^tA) = A$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.  
**V F** b) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.  
**V F** c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .  
**V F** b) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.  
**V F** c) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .  
**V F** d) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .  
**V F** c) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.  
**V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.
- V F** b) Il rango è un'applicazione lineare.
- V F** c) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .
- V F** d) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.
- V F** b) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .
- V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.
- V F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .
- V F** b) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.
- V F** c) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.
- V F** d) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** c) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.
- V F** b) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.
- V F** c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** d) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .
- V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.
- V F** c) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.
- V F** b) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.
- V F** c) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .
- V F** d) Ogni gruppo è commutativo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.
- V F** d) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- V F** c) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .
- V F** d) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** c) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .
- V F** b) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .
- V F** b) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^tA) = A$ .
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** b) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .
- V F** b) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** c) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.
- V F** d) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.  
**V F** b) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.  
**V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.  
**V F** b) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è 1, allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è 1.  
**V F** c) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .  
**V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area 1.  
**V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .  
**V F** c) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** b) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .  
**V F** c) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** d) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** b) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .  
**V F** c) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .  
**V F** d) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .  
**V F** c) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.  
**V F** d) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area 1.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^tA) = A$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .  
**V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .  
**V F** d) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .  
**V F** b) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è 1, allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è 1.  
**V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.  
**V F** d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** b) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .
- V F** d) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.
- V F** b) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.
- V F** b) Il rango è un'applicazione lineare.
- V F** c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** b) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.
- V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .
- V F** d) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.
- V F** c) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.
- V F** d) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.
- V F** b) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.
- V F** c) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .
- V F** d) Ogni gruppo è commutativo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .
- V F** b) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .
- V F** d) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.
- V F** b) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.
- V F** c) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.
- V F** d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.
- V F** c) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .
- V F** d) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.
- V F** d) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.
- V F** b) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .
- V F** c) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.
- V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.
- V F** b) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .
- V F** c) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .
- V F** d) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** c) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.
- V F** d) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.
- V F** b) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.
- V F** c) Il rango è un'applicazione lineare.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .
- V F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** c) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.
- V F** d) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** b) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.
- V F** c) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.
- V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.
- V F** c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** d) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .
- V F** c) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.
- V F** d) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .  
**V F** b) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.  
**V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.  
**V F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .  
**V F** c) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** d) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.  
**V F** c) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.  
**V F** d) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^t A) = A$ .  
**V F** d) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.
- V F** b) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .
- V F** d) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .
- V F** b) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.
- V F** c) Ogni gruppo è commutativo.
- V F** d) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.
- V F** c) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .
- V F** b) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.
- V F** c) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è 1, allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è 1.
- V F** d) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .
- V F** b) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.
- V F** c) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** d) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.
- V F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.
- V F** d) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** b) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .
- V F** c) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .
- V F** d) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.
- V F** c) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .
- V F** d) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area 1.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .
- V F** c) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.
- V F** d) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .  
**V F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .  
**V F** c) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.  
**V F** d) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .  
**V F** c) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.  
**V F** d) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .  
**V F** b) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è 1, allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è 1.  
**V F** c) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.  
**V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni gruppo è commutativo.  
**V F** b) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .  
**V F** c) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.  
**V F** d) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** b) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .  
**V F** c) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .  
**V F** d) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .
- V F** c) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area 1.
- V F** d) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .
- V F** b) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** b) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- V F** d) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.
- V F** b) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.
- V F** c) Il rango è un'applicazione lineare.
- V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.  
**V F** b) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.  
**V F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.  
**V F** d) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.  
**V F** b) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .  
**V F** d) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** b) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.  
**V F** c) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.  
**V F** d) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^tA) = A$ .  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.
- V F** b) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
- V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** d) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.
- V F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.
- V F** c) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .
- V F** d) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .
- V F** c) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.
- V F** d) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.
- V F** b) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.
- V F** c) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.
- V F** d) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.
- V F** b) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .
- V F** c) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .
- V F** d) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici fra loro simili hanno sempre la stessa traccia.  
**V F** b) Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  allora  $\lambda^3$  è un autovalore di  $A^3$ .  
**V F** c) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . La matrice associata a  $f$  rispetto a una base spettrale di  $f$  è ortogonale.  
**V F** d) Ogni matrice reale quadrata è simile a se stessa.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il rango è un'applicazione lineare.  
**V F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.  
**V F** c) Se un sistema lineare ha almeno due soluzioni distinte ne ha infinite.  
**V F** d) Esiste uno e un solo endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che mandi  $(1, 0)$  in  $(0, 0)$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le matrici quadrate reali  $n \times n$  sono simili tra loro.  
**V F** b) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$ .  
**V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .  
**V F** d) Non esistono trasformazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  suriettive.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le rappresentazioni parametriche di piani di  $\mathbb{R}^3$  contengono tre parametri.  
**V F** b) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $-2x + y + z = 1$  e  $2x - y - z = 2$  sono fra loro paralleli.  
**V F** c) Ogni sistema di riferimento cartesiano ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  è dato da tre punti di  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{w})$  è il vettore nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle parti dell'insieme  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  ha cardinalità 64.  
**V F** b) Ogni gruppo è commutativo.  
**V F** c) Sia  $P$  una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che tutte le volte che  $P$  vale per un numero naturale  $n$  valga anche per il successivo. Allora  $P$  vale per tutti i numeri naturali.  
**V F** d) Siano  $A, B, C$  insiemi. Allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $5 \times 4$  è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** b) Se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale finitamente generato  $V$  con  $U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .
- V F** c) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $xyz = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** d) In uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ogni sistema di generatori contiene almeno  $n$  vettori.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- V F** b) L'operazione di somma è definita per qualunque coppia di matrici reali.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale e  $A^2$  è diagonale allora anche  $A$  è diagonale.
- V F** d) Una matrice reale  $A$  è simmetrica se e solo se  $A = A^2$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale di ordine 7 con determinante positivo ammette l'autovalore 1.
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma in uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Si ha che  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** c) Ogni insieme di vettori non nulli di  $\mathbb{R}^n$  a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
- V F** d) Esistono spazi vettoriali euclidei finitamente generati che non hanno nessuna base ortonormale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  è positivo se e solo se  $A$  è invertibile.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$  e  $A$  ha una riga con tutti gli elementi uguali a  $-1$ , allora  $\det A = 0$ .
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .
- V F** d) La matrice nulla  $2 \times 2$  è l'unica matrice reale  $2 \times 2$  con traccia e determinante nulli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $f$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$ . Allora 0 è un autovalore di  $f$  se e solo se  $f$  non è iniettivo.
- V F** b) Ogni matrice reale diagonalizzabile è simmetrica.
- V F** c) Se la molteplicità algebrica di un autovalore reale  $\lambda$  è 1, allora anche la molteplicità geometrica di  $\lambda$  è 1.
- V F** d) Ogni endomorfismo  $f$  di uno spazio vettoriale finitamente generato  $V$  ammette una base fatta di autovettori di  $f$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati qualunque sono sempre tra loro isomorfi.
- V F** b) Tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^7$  hanno cardinalità 7.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali  $n \times n$  triangolari alte non è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare usuali.
- V F** d) Il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $x + y = 1$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  a traccia nulla,  $AB$  ha traccia nulla.
- V F** b) Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una qualunque matrice coincidono.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale, allora  ${}^t({}^tA) = A$ .
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ ,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto scalare standard fra due vettori  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .
- V F** b) La funzione nulla da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ .
- V F** c) Esistono esattamente 3 matrici ortogonali  $3 \times 3$ .
- V F** d) Esistono infiniti prodotti scalari distinti su  $\mathbb{R}^2$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo  $f(x, y, z) = (x, y, 1)$  per ogni  $(x, y, z)$  è lineare.
- V F** b) L'immagine di una trasformazione lineare  $f : V \rightarrow W$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- V F** c) La matrice associata a un endomorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  non dipende dalla base scelta su  $V$ .
- V F** d) Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $f$  è iniettiva se e solo se il suo nucleo coincide con  $V$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) I ranghi delle matrici completa e incompleta di un sistema lineare differiscono al più di una unità.
- V F** c) Il rango di una matrice reale non varia applicando alla matrice una qualunque trasformazione riga.
- V F** d) Il rango di una matrice reale non può mai essere nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det A = 0$  se e solo se  $r(A) < n$ .
- V F** b) Il determinante della matrice identità  $100 \times 100$  è 1.
- V F** c) Il determinante di una matrice reale quadrata  $A$  a termini tutti positivi è sempre positivo.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale  $n \times n$ , allora  $\det(-A) = -\det A$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In  $\mathbb{R}^3$  una retta e un piano fra loro non paralleli si intersecano sempre.
- V F** b) Il triangolo di  $\mathbb{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  ha area 1.
- V F** c) Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ .
- V F** d) Il piano di equazione cartesiana  $x + y + z + 3 = 0$  e la retta di equazione parametrica  $x = 3t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$  sono fra loro ortogonali in  $\mathbb{R}^3$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi,  $A = (A \setminus B) \cup B$ .
- V F** b) L'insieme delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.
- V F** c) L'insieme dei polinomi reali in  $x$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) L'insieme dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.