

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
  - B) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
  - C) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
  - D) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
  
- 2) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
  - B) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
  - C) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .
  - D)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  
- 3) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.
  - B)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - C) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .
  - D) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  
- 4) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  - B)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - C)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  - D)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
  
- 5) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  - B) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - C) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .
  - D) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .

- 6) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  - B)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - C) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  - D) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
- 7) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
  - B) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - C)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  - D) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.
- 8) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
- 9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
  - B) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - C) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
  - D) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.
  - B) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
  - C)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - D) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
  
- 2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
  - A) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
  - B) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .
  - C) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.
  - D) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.
  
- 3) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica
 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
 rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  
- 4) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\dim \operatorname{Im} T = \rho(A)$ .
  - B) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
  - C)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
  - D) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.

- 5) Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  - B) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
  - C) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .
  - D)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
- 6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
  - B) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.
  - D) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
- 7) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
  - B) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.
  - C) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
  - D) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.
- 8) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- A)  $V$  ammette una ed una sola base.
  - B) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
  - C) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
  - D)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
- 9) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .
  - B) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .
  - C) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .
  - D) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  - B)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
  - C) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
  - D) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .
  
- 2) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .
  - B) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .
  - C) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - D) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  
- 3) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
  - B) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  - C)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - D)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  
- 4) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
  - A) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .
  - B) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .
  - C) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .
  - D) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .
  
- 5) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{0\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  - B) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.
  - C)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - D) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .

- 6) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
  - B)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  - C)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - D) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
- 7) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$  rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.
  - B) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.
  - C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
  - D) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .
- 9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
  - B) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
  - C) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
  - D) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
  - A) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - B) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
  - C) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
  - D) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
  
- 2) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.
  - B) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
  - C) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.
  - D) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
  
- 3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - B) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - C) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
  - D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.
  
- 4) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
  - B)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - C) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
  - D) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.

- 5) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
- 6) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - B)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  - C) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.
  - D)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
- 7) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- A)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
  - B) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
  - C)  $V$  ammette una ed una sola base.
  - D) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
- 8) Siano  $A, B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
  - B) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
  - C)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  - D) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .
- 9) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
  - B)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
  - C) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
  - D)  $\dim \operatorname{Im} T = \rho(A)$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
  - B)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  - C) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
  - D) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .
  
- 2) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
  - B)  $V$  ammette una ed una sola base.
  - C) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
  - D) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
  
- 3) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  
- 4) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - B) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  - C)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
  - D)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  
- 5) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - B) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  - C) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .
  - D) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .

- 6) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - B)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  - C) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
  - D) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
- 7) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - B) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.
  - C)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
  - D)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - B) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
  - C) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
  - D) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
- 9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - B) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
  - C) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
  - A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .
  - B) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .
  - C) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .
  - D) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .
  
- 2) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
  - B) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.
  - C)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - D) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
  
- 3) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
  - B) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .
  - C)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
  - D)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  
- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
  - B) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
  - C) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
  - D) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

- 5) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$  rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .  
 B)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .  
 C)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .  
 D)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
- 6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.  
 B) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.  
 C) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .  
 D) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
- 7) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .  
 B)  $\dim \text{Im}T = \rho(A)$ .  
 C)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .  
 D) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
- 8) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- A)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .  
 B) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .  
 C) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.  
 D) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$  allora  $U + W \neq V$ .
- 9) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.  
 B) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .  
 C) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .  
 D) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
  - B) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .
  - C)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
  - D)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  
- 2) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
  - B) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
  - C)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
  - D)  $V$  ammette una ed una sola base.
  
- 3) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - B)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  - C) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  - D)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
  
- 4) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - B) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .
  - C) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  - D) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .
  
- 5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
  - A) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.
  - B) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
  - C) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .
  - D) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.

- 6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.
  - C) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - D) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
- 7) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - B) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  - C)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  - D) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
- 8) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .
  - B) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .
  - C) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .
  - D) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .
- 9) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica
- $$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
- rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
  - B) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
  - C) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.
  - D) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.
  
- 2) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  
- 3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
  - B) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
  - C) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
  - D) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
  
- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
  - A) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
  - B) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - C) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
  - D) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
  
- 5) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.
  - B)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - C) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  - D) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .

- 6) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
  - B) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
  - C)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  - D) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .
- 7) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.
  - B)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - C) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
  - D) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
- 8) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\dim \text{Im} T = \rho(A)$ .
  - B)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
  - C) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
  - D) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
- 9) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  - B) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - C)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
  - D) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - B) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  - C) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .
  - D) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.
  
- 2) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  
- 3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
  - A) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - B) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
  - C) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
  - D) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
  
- 4) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
  - B)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  - C) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  - D)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  
- 5) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .
  - B) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .
  - C) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  - D) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .

- 6) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
  - B) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  - C)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  - D)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- 7) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - B)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
  - C)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  - D) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
  - B) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
  - C) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
  - D) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
- 9) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
  - B)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  - C) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .
  - D)  $A \cdot B = B \cdot A$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$  rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .  
 B)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .  
 C)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .  
 D)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
- 2) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .  
 B) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .  
 C) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .  
 D) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .
- 3) Siano  $A, B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .  
 B)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .  
 C) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.  
 D)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.  
 B) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.  
 C) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.  
 D) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

- 5) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- A) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
  - B)  $V$  ammette una ed una sola base.
  - C) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
  - D)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
- 6) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
  - B) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.
  - C)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - D) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
- 7) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.
  - B) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
  - C) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
  - D) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.
- 8) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
  - B)  $\dim \text{Im} T = \rho(A)$ .
  - C)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
  - D) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
- 9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.
  - B) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .
  - C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
  - D) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
  - B) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  - C)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - D)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  
- 2) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
  - B)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  - C)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - D) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  
- 3) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
  - A) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .
  - B) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .
  - C) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .
  - D) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .
  
- 4) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .
  - B) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  - C) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - D) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .

- 5) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$  rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
- 6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.
  - B) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.
  - C) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .
  - D) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
- 7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
  - B) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
  - C) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
  - D) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
- 8) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  - B) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .
  - C) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
  - D)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
- 9) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- A) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  - B) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .
  - C)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - D) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano  $A, B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
  - B) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .
  - C)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  - D)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
  
- 2) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
  - B) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.
  - C) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
  - D)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  
- 3) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
  - A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - B)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
  - C) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.
  - D)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  
- 4) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
  - B) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
  - C)  $V$  ammette una ed una sola base.
  - D)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .

- 5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.
  - C) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
  - D) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
- 6) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
- 7) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.
  - B) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
  - C) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.
  - D) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
- 8) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
  - B)  $\dim \text{Im} T = \rho(A)$ .
  - C) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
  - D)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
- 9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - B) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
  - C) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
  - D) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A)  $V$  ammette una ed una sola base.
  - B)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
  - C) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
  - D) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
  
- 2) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  - B)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
  - C)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - D) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  
- 3) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .
  - B) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .
  - C) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - D) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  
- 4) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  - B) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
  - C)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - D)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  
- 5) Siano  $A, B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  - B)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
  - C) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
  - D) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .

- 6) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
- 7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
  - B) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - C) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
  - D) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
- 8) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  - B) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - C)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
  - D) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.
- 9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
  - B) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - C) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$  rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .  
 B)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .  
 C)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .  
 D)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .
- 2) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .  
 B) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .  
 C) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .  
 D) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .
- 3) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .  
 B)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .  
 C) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .  
 D)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.  
 B) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.  
 C) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.  
 D) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.

- 5) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
  - B)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
  - C) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
  - D)  $\dim \operatorname{Im} T = \rho(A)$ .
- 6) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- A) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .
  - B) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{0\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  - C)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - D) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.
- 7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.
  - B) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .
  - C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
  - D) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.
- 8) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.
  - B) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
  - C) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.
  - D) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\operatorname{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
- 9) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
  - B)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - C) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
  - D) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - B)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  - C)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
  - D) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  
- 2) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
  - A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .
  - B) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .
  - C) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .
  - D) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .
  
- 3) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - B) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .
  - C) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .
  - D) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  
- 4) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica
 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
 rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .

- 5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.
  - B) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.
  - C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
  - D) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .
- 6) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - B) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  - C) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
  - D)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
- 7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - B) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
  - C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.
  - D) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
- 8) Siano  $A, B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
  - B)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  - C) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .
  - D) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
- 9) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- A)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
  - B)  $V$  ammette una ed una sola base.
  - C) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
  - D) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
  - B) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
  - C) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
  - D) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
  
- 2) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
  - B) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
  - C)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - D) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.
  
- 3) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  - B)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - C) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.
  - D) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .
  
- 4) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  - B) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
  - C)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
  - D) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .

- 5) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.
  - B) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.
  - C) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
  - D) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
- 6) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
  - B) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
  - C)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
  - D)  $\dim \text{Im} T = \rho(A)$ .
- 7) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.
  - B)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  - C) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - D)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
  - B) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
  - C) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - D) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
- 9) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  
- 2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
  - A) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - B) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
  - C) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
  - D) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
  
- 3) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - B) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  - C) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .
  - D) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.
  
- 4) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  - B) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  - C)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - D) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
  
- 5) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
  - A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - B)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  - C)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
  - D) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.

- 6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
  - B) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
  - C) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
  - D) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
- 7) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
  - B)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  - C) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .
  - D)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
- 8) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  - B)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  - C)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - D)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
- 9) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  - B) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .
  - C) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - D) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
  - B)  $\dim \operatorname{Im} T = \rho(A)$ .
  - C) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
  - D) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
  
- 2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
  - B) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - C) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.
  - D) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  
- 3) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - B) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.
  - C) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
  - D) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
  
- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
  - A) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .
  - B) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.
  - C) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.
  - D) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.

- 5) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- $V$  ammette una ed una sola base.
  - $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
  - se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
  - se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
- 6) Siano  $A, B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  - $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
  - se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .
  - se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
- 7) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .
  - per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .
  - per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10 \langle u, v \rangle$ .
  - se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .
- 8) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
  - se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
  - se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.
  - un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.
- 9) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica
- $$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
- rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .
  - $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - B) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  - C)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  - D)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
  
- 2) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - B) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  - C) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .
  - D) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .
  
- 3) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica
 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
 rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .
  
- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
  - A) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.
  - B) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.
  - C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
  - D) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .

- 5) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - B)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  - C) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  - D) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
- 6) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .
  - B) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .
  - C) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .
  - D) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .
- 7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
  - B) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
  - C) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
  - D) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- 8) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  - B) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .
  - C)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
  - D) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
- 9) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- A) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  - B) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .
  - C) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.
  - D)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .
  - B)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
  - C) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
  - D)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  
- 2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.
  - B) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - C) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - D) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
  
- 3) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
  - B)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
  - C) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
  - D)  $V$  ammette una ed una sola base.
  
- 4) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
  - A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - B)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
  - C)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  - D) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.

- 5) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.
  - B) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
  - C) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.
  - D) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
- 6) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
  - B)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
  - C) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
  - D)  $\dim \text{Im} T = \rho(A)$ .
- 7) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - B) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
  - C) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
  - D) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
- 9) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
  - B)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - C) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
  - D) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - B) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  - C) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .
  - D) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .
  
- 2) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - B)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  - C) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  - D) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .
  
- 3) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
  - A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  - B)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  - C) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.
  - D)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
  
- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - B) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.
  - C) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
  - D) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

- 5) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
- 6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
  - B) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
  - C) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
  - D) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
- 7) Siano  $A, B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
  - B) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .
  - C)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  - D)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
- 8) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- A) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
  - B) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
  - C)  $V$  ammette una ed una sola base.
  - D)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
- 9) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - B) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  - C)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  - D)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
  - B)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
  - C) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .
  - D)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  
- 2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
  - B) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
  - C) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
  - D) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
  
- 3) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
  - B) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
  - C)  $\dim \operatorname{Im} T = \rho(A)$ .
  - D) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
  
- 4) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - B) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.
  - C) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .
  - D) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  
- 5) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica
 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
 rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .

- 6) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
- A) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .
  - B) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .
  - C) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .
  - D) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .
- 7) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - B) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
  - C) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.
  - D) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.
  - B) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .
  - C) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.
  - D) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
- 9) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
  - B) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.
  - C) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
  - D) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
  - A) se  $n = 3$ ,  $V$  è orientato e  $\{u, v, w\}$  è un sottoinsieme linearmente dipendente di  $V$ , allora  $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ .
  - B) per ogni  $v \in V$  risulta  $\langle v, v \rangle = 0$ .
  - C) se  $U$  è un sottospazio vettoriale euclideo di  $V$  ed ha dimensione  $k$ , allora anche il suo complemento ortogonale in  $V$  ha dimensione  $k$ .
  - D) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle 2u, 5v \rangle = 10\langle u, v \rangle$ .
  
- 2) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base  $B$  di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\det A \neq 0$  se e solo se  $T$  è iniettivo.
  - B)  $\ker T$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - C) se  $H$  è un insieme di generatori per  $V$  allora  $T(H)$  è un insieme di generatori per  $ImT$ .
  - D)  $A$  è la matrice associata a  $T$  rispetto a qualunque base di  $V$ .
  
- 3) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $\mathbf{S}$  è omogeneo allora ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore di  $\rho(A)$ .
  - B) se  $\mathbf{S}$  non ammette nessuna soluzione allora  $\rho(A) > \rho(C)$ .
  - C) se  $\mathbf{S}$  ha più equazioni che incognite allora non può ammettere soluzioni.
  - D) se  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  esiste almeno un sistema lineare le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di  $U$ .
  
- 4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
  - A) la distanza fra il punto di coordinate  $(4, 2)$  e la retta di equazione  $3x + 3y - 3 = 0$  è  $2\sqrt{2}$ .
  - B) le rette di equazioni cartesiane  $2x - 5y = 1$  e  $10x + 4y = 0$  sono fra loro parallele.
  - C) l'area non orientata (cioè il valore assoluto dell'area) del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  è 1.
  - D) la conica di equazione  $37y^2 + 92x^2 = 1$  è una ellisse.

- 5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  continue è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione di funzioni.
  - B) l'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - C) l'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
  - D) l'insieme dei polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e differenza.
- 6) Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $(A + B) + C = (C + B) + A$ .
  - B) se  $\det A = 0$  allora almeno una colonna di  $A$  è nulla.
  - C)  $\det(3A - 2B) = 3 \det A - 2 \det B$ .
  - D) se  $A$  è ortogonale allora  $\det A = 1$  oppure  $\det A = -1$ .
- 7) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
- A)  $V$  ammette una ed una sola base.
  - B) se  $B$  è una base di  $U$  e  $B'$  è una base di  $W$  allora  $B \cap B'$  è un insieme di generatori per  $U \cap W$ .
  - C)  $\dim U - \dim W = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$ .
  - D) se  $n = \dim V$  ogni sottoinsieme di  $V$  che contenga almeno  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
- 8) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica
- $$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3s \\ z = 4t \end{cases}$$
- rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $\mathcal{A}$  è un piano parallelo all'asse delle  $y$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $z$ .
- 9) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) se  $A$  è simmetrica l'endomorfismo  $T$  ammette una base spettrale.
  - B)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - C)  $A$  e  $B$  hanno lo stesso rango.
  - D) se  $v$  è un autovettore per  $T^2$  allora è anche un autovettore per  $T$ .

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2, per le risposte esatte è +2.** In questo testo il simbolo  $n$  denota sempre un numero naturale non nullo.

- 1) Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita  $n$ , dotato di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora
  - A)  $V$  ammette esattamente due orientazioni.
  - B) se  $T : V \rightarrow V$  è una trasformazione ortogonale e  $u, v \in V$  sono vettori fra loro ortogonali allora anche  $T(u), T(v)$  sono vettori fra loro ortogonali.
  - C)  $V$  ammette una ed una sola base ortonormale.
  - D) per  $u, v \in V$  si ha  $\langle u - v, u + v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ .
  
- 2) Siano  $A$  e  $B$  due matrici reali  $n \times n$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se tutte le righe di  $A$  sono diverse fra loro allora  $\det A \neq 0$ .
  - B) se  $A$  e  $B$  sono invertibili allora  $A \cdot B = A^{-1} \cdot B^{-1}$ .
  - C)  $A \cdot B = B \cdot A$ .
  - D)  $\det(A \cdot B) = \det B \cdot \det A$ .
  
- 3) Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di uno spazio vettoriale reale  $V$  finitamente generato. Allora
  - A) se  $B$  è una base di  $U$ ,  $B'$  è una base di  $W$  e  $V = U + W$ , allora  $B \cup B'$  è un insieme di generatori per  $V$ .
  - B)  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
  - C) se  $U \neq W$  allora  $U$  e  $W$  non possono avere una stessa base.
  - D) se  $\dim U + \dim W = \dim V$  e  $U \cap W \neq \{0\}$  allora  $U + W \neq V$ .
  
- 4) Si consideri il sottospazio  $\mathcal{A}$  dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana  $8x - 7y = 2$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A)  $\mathcal{A}$  è una retta parallela all'asse delle  $x$ .
  - B)  $\mathcal{A}$  è un piano ortogonale all'asse delle  $z$ .
  - C)  $\mathcal{A}$  è una retta non ortogonale all'asse delle  $y$ .
  - D)  $\mathcal{A}$  è un piano non parallelo all'asse delle  $y$ .
  
- 5) Sia  $\mathbf{S}$  un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ( $m, n > 0$ ). Indichiamo con  $A$  e  $C$  la matrice incompleta e completa associate ad  $\mathbf{S}$ , rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  - A) se  $x$  e  $y$  sono due soluzioni di  $\mathbf{S}$  allora  $x - 2y$  è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad  $\mathbf{S}$ .
  - B) un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.
  - C) se  $\rho(A) = \rho(C)$  allora  $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$ .
  - D) se le equazioni di  $\mathbf{S}$  sono linearmente dipendenti allora  $\mathbf{S}$  ammette infinite soluzioni.

- 6) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e sia  $A$  la matrice associata a  $T$  rispetto a una base fissata di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $T$  è suriettivo se e solo se  $\dim \ker T = 0$ .
  - B) se  $B$  è una base per  $V$  allora  $T(B)$  è una base per  $V$ .
  - C)  $\dim \operatorname{Im} T = \rho(A)$ .
  - D) se  $\det A \neq 0$  allora  $T$  è invertibile.
- 7) Sia  $T$  un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione finita  $n > 0$  e siano  $A, B$  due matrici di  $T$  rispetto a due basi fissate di  $V$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A)  $A$  e  $B$  sono matrici simili.
  - B) se  $v_1, \dots, v_k$  sono autovettori non nulli linearmente dipendenti di  $T$  allora i rispettivi autovalori non possono essere tutti fra loro distinti.
  - C) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di  $T$  è strettamente superiore alla sua molteplicità algebrica.
  - D) se  $\det A = 0$  allora  $T$  ammette almeno un autovalore.
- 8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad sistema di riferimento cartesiano fissato?
- A) le rette di equazioni cartesiane  $4x - 8y = 1$  e  $2x - 4y = 0$  sono fra loro ortogonali.
  - B) la distanza fra il punto di coordinate  $(1, 4)$  ed il punto di coordinate  $(5, 1)$  è 5.
  - C) la conica di equazione  $y = 59x^4$  è una parabola.
  - D) la distanza fra il punto di coordinate  $(2, 1)$  e la retta di equazione  $4x - 3y = 10$  è 1.
- 9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A) l'insieme delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  derivabili è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma di funzioni.
  - B) l'insieme delle successioni reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
  - C) l'insieme  $\mathbf{Z}_{11}$  delle classi di resto modulo 11 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 11.
  - D) l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.