

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.  
**V F** b) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.  
**V F** c) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.  
**V F** d)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.  
**V F** b) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .  
**V F** c) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .  
**V F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.  
**V F** b) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .  
**V F** c) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.  
**V F** d) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.  
**V F** b) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** c) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.  
**V F** d) Non esistono matrici di rango 0.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.  
**V F** b) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.  
**V F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.  
**V F** d) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .  
**V F** b) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.  
**V F** c) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.  
**V F** d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.  
**V F** b) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.  
**V F** c) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.  
**V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.  
**V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .  
**V F** c) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .  
**V F** d) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .  
**V F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.  
**V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.  
**V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .  
**V F** d) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.  
**V F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.  
**V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.  
**V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .  
**V F** c) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.  
**V F** d) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .  
**V F** b) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .  
**V F** c) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.  
**V F** d) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ .
- V F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** c) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_2$ .
- V F** d) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .
- V F** b) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.
- V F** c) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.
- V F** d)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .
- V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .
- V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.
- V F** d) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.
- V F** b) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.
- V F** c) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** d) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** b) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.
- V F** c) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .
- V F** d) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.
- V F** c) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.
- V F** d) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.
- V F** b) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.
- V F** c) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .
- V F** b) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** c) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.
- V F** d) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.  
**V F** b) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.  
**V F** c) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .  
**V F** d) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono matrici di rango 0.  
**V F** b) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.  
**V F** c) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** d) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.  
**V F** b) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.  
**V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.  
**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .  
**V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.  
**V F** d) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).  
**V F** b) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.  
**V F** c) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.  
**V F** d) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.
- V F** c) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.
- V F** d)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.
- V F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .
- V F** c) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .
- V F** d) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).
- V F** b) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.
- V F** c) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .
- V F** d) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .
- V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** d) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .
- V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .
- V F** c) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.
- V F** d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.
- V F** b) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.
- V F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** d) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .
- V F** c) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .
- V F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** c) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ .
- V F** d) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_2$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.
- V F** b) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
- V F** c) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .
- V F** d) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .



Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .  
**V F** b) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ .  
**V F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** d) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_2$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.  
**V F** b) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .  
**V F** b) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.  
**V F** c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.  
**V F** d) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** b) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.  
**V F** c) Non esistono matrici di rango 0.  
**V F** d) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.
- V F** b) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.
- V F** c) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- V F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.
- V F** d) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.
- V F** b) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** c) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.
- V F** d) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** b) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.
- V F** c)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .
- V F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).
- V F** b) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .
- V F** c) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.
- V F** d) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** b) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .
- V F** c) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.
- V F** d) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .
- V F** d) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .
- V F** b) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .
- V F** c) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.
- V F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.
- V F** b) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.
- V F** c) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.
- V F** d)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.
- V F** b) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.
- V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** d) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .
- V F** c) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** d) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .
- V F** b) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .
- V F** c) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
- V F** d) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .
- V F** b) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.
- V F** c) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.
- V F** d) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .
- V F** b) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .
- V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .
- V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$ .
- V F** c) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .
- V F** d) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.
- V F** c) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.
- V F** d) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .
- V F** b) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.
- V F** c) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.
- V F** d) Non esistono matrici di rango 0.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.
- V F** b) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.
- V F** c) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.
- V F** d) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .  
**V F** b) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.  
**V F** c) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.  
**V F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.  
**V F** b) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.  
**V F** c)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).  
**V F** d) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.  
**V F** b) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .  
**V F** d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .  
**V F** b) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.  
**V F** c) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.  
**V F** d) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.  
**V F** b) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.  
**V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .  
**V F** d) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .
- V F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .
- V F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .
- V F** c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
- V F** d) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.
- V F** b) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.
- V F** c)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).
- V F** d) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.
- V F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** c)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .
- V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.
- V F** b) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .
- V F** c) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.
- V F** d) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.
- V F** b) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .
- V F** c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** d) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .
- V F** c) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .
- V F** b) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
- V F** c) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.
- V F** d) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.
- V F** b) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.
- V F** c) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.
- V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.



Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .  
**V F** b) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.  
**V F** c) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.  
**V F** d) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .  
**V F** b) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.  
**V F** c) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .  
**V F** d) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.  
**V F** b)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .  
**V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono matrici di rango 0.  
**V F** b) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.  
**V F** c) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.  
**V F** d) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.  
**V F** b) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.  
**V F** c) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.  
**V F** d) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.  
**V F** b) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .  
**V F** d) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.  
**V F** b) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.  
**V F** c) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.  
**V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.  
**V F** b)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).  
**V F** c) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.  
**V F** d) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .  
**V F** b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.  
**V F** c) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .  
**V F** d) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.
- V F** d) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** b) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.
- V F** c) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.
- V F** d) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$ .
- V F** b) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$ .
- V F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** d) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.
- V F** b) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .
- V F** c) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.
- V F** d)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.
- V F** b) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .
- V F** d) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .
- V F** d) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .
- V F** b) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .
- V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .
- V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .
- V F** b) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .
- V F** c) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
- V F** d) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** c) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.
- V F** d)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono matrici di rango 0.  
**V F** b) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.  
**V F** c) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** d) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .  
**V F** c) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.  
**V F** d) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .  
**V F** b) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.  
**V F** c) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.  
**V F** d) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.  
**V F** b) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.  
**V F** c) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.  
**V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.  
**V F** b) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.  
**V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .  
**V F** d) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .  
**V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.  
**V F** d) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).  
**V F** b) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.  
**V F** c) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.  
**V F** d) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.  
**V F** b) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .  
**V F** c) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .  
**V F** d) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.  
**V F** b) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.  
**V F** c) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .  
**V F** d) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$ .
- V F** c) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$ .
- V F** d) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.
- V F** c) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .
- V F** d) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.
- V F** b) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.
- V F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** d) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.
- V F** c) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .
- V F** d) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.
- V F** b) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.
- V F** c) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .
- V F** d)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .
- V F** b) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
- V F** c) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.
- V F** d) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .
- V F** b) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .
- V F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.
- V F** d) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .
- V F** b) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .
- V F** c) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.
- V F** d) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** b)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .
- V F** c) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.
- V F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.



Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .  
**V F** b) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.  
**V F** b) Non esistono matrici di rango 0.  
**V F** c) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** d) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.  
**V F** b) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.  
**V F** c) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.  
**V F** d) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.  
**V F** b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.  
**V F** c) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ .
- V F** b) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .
- V F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** d) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_2$ .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .
- V F** c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
- V F** d) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.
- V F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** c)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .
- V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.
- V F** b) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.
- V F** c) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.
- V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .
- V F** b)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).
- V F** c) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.
- V F** d) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.  
**V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .  
**V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.  
**V F** d) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .  
**V F** b) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.  
**V F** c) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.  
**V F** d) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .  
**V F** b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.  
**V F** c) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .  
**V F** d) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.  
**V F** b)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).  
**V F** c) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.  
**V F** d) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.  
**V F** b) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.  
**V F** c) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .  
**V F** d) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.  
**V F** b) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.  
**V F** c) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .  
**V F** d) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .  
**V F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.  
**V F** c) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.  
**V F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.  
**V F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .  
**V F** d) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .  
**V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.  
**V F** d) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .
- V F** b) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.
- V F** c) Non esistono matrici di rango 0.
- V F** d) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** b) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .
- V F** c) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.
- V F** d) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.
- V F** b) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.
- V F** c) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.
- V F** b) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.
- V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .
- V F** c) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.
- V F** d) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.
- V F** b) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.
- V F** c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).
- V F** b) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .
- V F** c) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.
- V F** d) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .
- V F** b) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ .
- V F** c) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_2$ .
- V F** d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.
- V F** b) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).
- V F** b) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.
- V F** c) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.
- V F** d) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .
- V F** d) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.
- V F** b) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .
- V F** c) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.
- V F** d) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** b) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .
- V F** c) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.
- V F** d) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .
- V F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .
- V F** d) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.  
**V F** b) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .  
**V F** c) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.  
**V F** d) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** b) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.  
**V F** c) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.  
**V F** d) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.  
**V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** c) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.  
**V F** d)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.  
**V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .  
**V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .  
**V F** d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.



Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .
- V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .
- V F** c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.
- V F** d) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.
- V F** c)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .
- V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .
- V F** b) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.
- V F** c) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.
- V F** d) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- V F** b) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.
- V F** c) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.
- V F** d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.
- V F** b) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.
- V F** c) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.
- V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.
- V F** b)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).
- V F** c) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.
- V F** d) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .
- V F** b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** c) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .
- V F** d) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.
- V F** b) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.
- V F** c) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .
- V F** d) Non esistono matrici di rango 0.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.
- V F** b) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.
- V F** c) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.
- V F** d) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
- V F** b) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .
- V F** c) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.
- V F** d) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .
- V F** b)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).
- V F** c) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.
- V F** d) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .
- V F** b) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.
- V F** c) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** b)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .
- V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** d) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .
- V F** b) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ .
- V F** b) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .
- V F** c) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_2$ .
- V F** d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.
- V F** b) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .
- V F** c) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** d) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .
- V F** b) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .
- V F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** b) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.
- V F** c) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .
- V F** b) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.
- V F** c) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.
- V F** d) Non esistono matrici di rango 0.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.
- V F** b) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.
- V F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.
- V F** d) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.
- V F** b) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.
- V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .
- V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.
- V F** d) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- V F** c) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.
- V F** d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .
- V F** b) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** c) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.
- V F** d) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).
- V F** b) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.
- V F** c) Ogni funzione  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.
- V F** d) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- V F** b) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .
- V F** c) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.
- V F** d) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.
- V F** b) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.
- V F** c) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.
- V F** d) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$ .
- V F** b) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .
- V F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** d) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.
- V F** b)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).
- V F** c) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.
- V F** d) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.
- V F** b) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .
- V F** d) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.
- V F** b) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.
- V F** c) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.
- V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.  
**V F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .  
**V F** d) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.  
**V F** b) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.  
**V F** c) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .  
**V F** d) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .  
**V F** b) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.  
**V F** c) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .  
**V F** d) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.  
**V F** b)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .  
**V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.  
**V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .  
**V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.  
**V F** d) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.



Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.
- V F** b) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.
- V F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.
- V F** d) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- V F** c) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.
- V F** d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.
- V F** b) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.
- V F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** d) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.
- V F** b) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.
- V F** c) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .
- V F** d)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .
- V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .
- V F** c) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.
- V F** d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.
- V F** c) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.
- V F** d)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$ .
- V F** c) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$ .
- V F** d) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.
- V F** c) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .
- V F** d) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .
- V F** b) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.
- V F** c) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.
- V F** d) Non esistono matrici di rango 0.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .  
**V F** b) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.  
**V F** c) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .  
**V F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.  
**V F** b) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.  
**V F** c) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.  
**V F** d)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.  
**V F** b) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.  
**V F** c) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .  
**V F** d) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .  
**V F** b) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.  
**V F** c) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.  
**V F** d) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** c) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.
- V F** b) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.
- V F** c) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .
- V F** d) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .
- V F** b) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .
- V F** c) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.
- V F** c)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .
- V F** d) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .
- V F** b) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.
- V F** c) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .
- V F** d) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali  $2 \times 2$  prive di autovalori reali.  
**V F** b) Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  ha grado  $n$ .  
**V F** c) Una matrice quadrata reale ammette l'autovalore nullo se e solo se ha determinante nullo.  
**V F** d) Ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è semplice se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica è simmetrica.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto di due matrici reali  $4 \times 4$  di rango 3 è sempre una matrice di rango 3.  
**V F** b) Se una matrice  $B$  si ottiene da una matrice  $A$  permutandone le righe, allora ha lo stesso rango di  $A$ .  
**V F** c) Se un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette almeno una soluzione non nulla, allora ne ammette infinite.  
**V F** d) Non esistono matrici di rango 0.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.  
**V F** b) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  hanno sempre intersezione vuota.  
**V F** c) Ogni trasformazione lineare suriettiva da  $\mathbb{R}^{12}$  a  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  è un isomorfismo.  
**V F** d) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.  
**V F** b)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ .  
**V F** c) Se due rette non sono incidenti allora sono parallele.  
**V F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro ortogonali.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se non è vero che una proprietà  $P$  valga per ogni numero naturale, allora esiste un numero naturale  $\bar{n}$  tale che  $P$  vale per  $\bar{n}$  ma non per  $\bar{n} + 1$ .
- V F** b) Esistono gruppi dotati di più di un elemento neutro.
- V F** c)  $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici).
- V F** d) In ogni gruppo  $(G, *)$  l'operazione  $*$  è associativa.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora  $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ .
- V F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  è incluso in almeno una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** c) Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  è un sistema di generatori per  $\mathbb{R}^n$ , allora  $k \geq n$ .
- V F** d) Due vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste un numero reale  $\alpha$  tale che  $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_2$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Le matrici  $5 \times 5$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}_3$  sono  $3^{25}$ .
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  invertibili, allora  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .
- V F** c) L'inversa di una matrice quadrata reale, se esiste, è unica.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $AB$  è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici  $A, B$  è nulla.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- V F** b) Su  $\mathbb{R}^7$  si può definire uno e un solo prodotto scalare.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita non nulla ammette almeno una base ortonormale.
- V F** d) Due vettori di uno spazio vettoriale euclideo sono fra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice reale  $100 \times 100$  si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga  $i$ -esima all' $(n - i + 1)$ -esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.
- V F** b) Una matrice diagonale reale  $n \times n$  è invertibile se e solo se contiene esattamente  $n$  elementi non nulli.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- V F** d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle righe.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine di matrici.  
**V F** b) Ogni matrice del cambiamento di base è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** c) Esistono endomorfismi che sono al tempo stesso semplici e non semplici.  
**V F** d) Esistono matrici reali  $5 \times 5$  prive di autovalori reali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle matrici  $3 \times 4$  a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale delle matrici reali  $3 \times 4$ .  
**V F** b) Se un sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^8$  è linearmente indipendente, allora  $k \leq 8$ .  
**V F** c) Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato.  
**V F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali simmetriche  $n \times n$  è sempre commutativo.  
**V F** b) La somma di due matrici diagonali  $n \times n$  è sempre una matrice diagonale  $n \times n$ .  
**V F** c) Lo spazio generato dalle righe e quello generato dalle colonne di una matrice  $n \times n$  coincidono sempre tra loro.  
**V F** d) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre associativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente.  
**V F** b) Ogni base ortogonale è anche una base ortonormale.  
**V F** c) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim W^\perp$ .  
**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^7$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$  rispetto a una base per  $\mathbb{R}^9$  e una base per  $\mathbb{R}^7$ , allora  $\dim \ker f + r(A) = 9$ .
- V F** c) Se  $f : V \rightarrow W$  è una trasformazione lineare e  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , allora  $f(S)$  è un sistema di generatori per  $W$ .
- V F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se un sistema lineare reale ammette almeno tre soluzioni distinte allora ne ammette infinite.
- V F** b) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se  $m = n$ .
- V F** c) Non esistono matrici reali  $n \times n$  di rango  $n + 1$ .
- V F** d) Esiste un'unica matrice reale  $8 \times 8$  completamente ridotta per righe di rango 8.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale, allora  $\det({}^tAA) \geq 0$ .
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali ammettono la stessa inversa, allora coincidono.
- V F** d) Se una matrice reale  $A$  possiede un minore  $M$   $k \times k$  con  $\det M \neq 0$ , allora  $r(A) = k$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a)  $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ .
- V F** b) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.
- V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x - 2y - 3z = 1$  e  $-3x - 2y + z = 0$  sono fra loro paralleli.
- V F** d) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = 4t + 1, y = 2t - 1, z = 4$  e  $x = 2t, y = t - 2, z = 5$  sono fra loro parallele.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il gruppo  $(S_4, \circ)$  delle permutazioni su 4 elementi è commutativo.
- V F** b) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_8, +)$  delle classi di resto modulo 8 è commutativo.
- V F** c) Ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva è anche suriettiva.
- V F** d)  $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è un campo ( $+$  e  $\cdot$  indicano le usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi).