22 Gennaio 2018 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

V **F** b) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V **F** c) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

V **F** d) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** b) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

V **F** d) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

V **F** b) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V **F** c) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

V **F** d) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n\times n$, allora A e B sono invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

V **F** b) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

V **F** c) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

V **F** d) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

V F b) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

V F c) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

V F d) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

V F b) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

V F c) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n - i + 1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

V F d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

V F b) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V F c) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^{\perp}$.

V F d) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V F d) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

V F c) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^\perp)^\perp = W^\perp$.

V F d) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

V F b) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

V F c) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V F d) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

V F b) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \le n$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

V F b) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

V F b) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\, {}^tB$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

V F d) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

V **F** b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** c) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

V **F** b) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

V **F** c) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

V **F** d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

V **F** b) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n-i+1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

V **F** c) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

V **F** b) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

V **F** c) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

V **F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n \times n$, allora A e B sono invertibili.

V **F** b) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

V **F** c) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V **F** d) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

V **F** b) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

V **F** c) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

V **F** d) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

V **F** b) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^\perp)^\perp = W^\perp$.

V **F** c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

V **F** b) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

V **F** d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

V **F** b) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

V **F** c) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V **F** d) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F c) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

V F b) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

V F c) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V F b) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^{\perp}$.

V F c) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

V F d) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

V F d) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

V F c) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

V F b) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

V F b) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V F c) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

V F d) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

V **F** b) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

V **F** c) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V **F** b) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V **F** b) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

V **F** c) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

V **F** d) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^\perp$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

V **F** b) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

V **F** c) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

V **F** d) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

V F c) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

V F d) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

V F d) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n - i + 1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

V F c) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

V F d) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

V F b) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

V F c) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

V **F** d) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** b) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

V **F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V **F** d) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

V **F** c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** d) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V **F** b) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

V **F** c) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

V **F** d) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^\perp)^\perp = W^\perp$.

V F b) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

V F d) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

V F b) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

V F c) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V F d) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V F b) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

V F c) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

V F d) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n \times n$, allora A e B sono invertibili.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

V F d) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha+\beta)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

V F c) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F d) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

V F b) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

V F c) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

V F d) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

V F b) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

V F d) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

V F b) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

V F d) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

V F d) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

V F b) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n - i + 1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

V F d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

V F b) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

V F b) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^\perp)^\perp = W^\perp$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

V **F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V **F** c) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

V **F** d) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim\ker f = n - r(A)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^{\perp}$.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V **F** c) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

V **F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

V **F** b) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V **F** c) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

V **F** d) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

V **F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

V F b) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V F c) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n \times n$, allora A e B sono invertibili.

V F d) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V F c) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

V F d) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V F c) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

V F b) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V F c) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

V F d) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

V F b) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V **F** b) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n\times n$, allora A e B sono invertibili.

V **F** c) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

V **F** d) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V **F** b) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

V **F** c) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^\perp$.

V **F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

V **F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

V **F** b) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

V **F** c) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

V **F** d) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

V **F** b) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

V **F** c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

V **F** d) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

V **F** b) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n-i+1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

V **F** d) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

V **F** c) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

V **F** d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V **F** b) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

V **F** c) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

V **F** d) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V **F** b) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

V **F** d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^\perp)^\perp = W^\perp$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

V F d) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

V F c) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

V F b) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha+\beta)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

V F c) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

V F c) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

V F d) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

V F b) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

V F d) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F b) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

V F c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V F d) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

V F b) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

V F c) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V F d) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

V F c) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

V F d) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.
V F b) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.
V F c) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.
V F d) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.
V F d) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n - i + 1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.
V F b) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.
V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.
V F d) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.
V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.
V F c) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.
V F d) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

V F b) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^{\perp})^{\perp} = W^{\perp}$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

V F d) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

V F c) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V F d) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

V F b) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

V F c) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V F d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n \times n$, allora A e B sono invertibili.

V F b) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

V F c) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V F d) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

V **F** c) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha+\beta)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** b) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

V **F** c) Se una matrice reale A $m\times n$ possiede un minore M $m\times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

V **F** d) Se A è una matrice reale $n\times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

V **F** c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

V **F** d) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

V **F** c) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V **F** d) La somma di due matrici $n\times n$ invertibili è sempre invertibile.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

V **F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

V **F** d) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V **F** b) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

V **F** c) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

V **F** d) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^{\perp}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim\ker f = n - r(A)$.

V **F** b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

V **F** c) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

V **F** d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

V **F** b) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

V **F** c) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

V **F** d) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

V **F** c) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V **F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F b) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

V F b) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

V F c) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

V F d) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

V F b) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

V F c) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

V F d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n - i + 1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

V F b) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

V F c) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^\perp$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V F c) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

V F d) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

V F b) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

V F b) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

V F c) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

V **F** d) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^\perp)^\perp = W^\perp$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

V **F** c) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

V **F** d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

V **F** b) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

V **F** c) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V **F** d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

V **F** b) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

V **F** c) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V **F** d) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

V F b) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V F c) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

V F d) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

V F b) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n \times n$, allora A e B sono invertibili.

V F c) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V F d) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

V F c) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

V F d) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F c) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

V F b) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

V F c) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

V F d) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

V F c) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

V F b) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

V F c) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

V F d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^\perp)^\perp = W^\perp$.

V F b) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

V F c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

V F c) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

V F b) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n - i + 1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

V F c) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

V F b) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

V F b) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

V F d) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F b) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

V **F** b) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V **F** c) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

V **F** d) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

V **F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** c) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V **F** d) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n \times n$, allora A e B sono invertibili.

V **F** b) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V **F** c) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

V **F** d) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

V **F** b) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V **F** c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

V F b) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

V F b) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

V F c) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V F d) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

V F b) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

V F b) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^\perp$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V F d) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V F b) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^{\perp}$.

V F c) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

V F d) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V F b) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n \times n$, allora A e B sono invertibili.

V F c) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

V F d) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

V F b) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n - i + 1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

V F c) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

V F d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V F b) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

V F c) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

V F d) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V F b) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

V F c) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

V F d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

V F b) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

V F c) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

V F d) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

V F b) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

V F c) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

V F d) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V F b) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

V F c) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

V F d) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

V F b) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V F b) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

V F c) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

V F b) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

V F c) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F b) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA{}^tB$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

V F d) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

V F d) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

V F c) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

V F d) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F b) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

V F c) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^\perp)^\perp = W^\perp$.

V F d) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

V F b) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

V F c) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

V F d) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

V F c) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

V F d) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

V F b) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^\perp)^\perp = W^\perp$.

V F c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

V F c) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n-i+1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

V F d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

V F b) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

V F c) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

V F c) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

V F d) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

V F b) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

V F c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n \times n$, allora A e B sono invertibili.

V F b) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

V F c) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

V F d) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

V F c) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha+\beta)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

V F c) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

V F d) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

V F b) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

V F d) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

V F c) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F c) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

V F b) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V F c) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

V F d) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V F b) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

V F c) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^{\perp}$.

V F d) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

V F b) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

V F c) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

V F d) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

V F c) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n-i+1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

V F d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

V F d) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

V F d) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

V F b) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^{\perp}$.

V F c) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

V F d) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V F d) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

V F c) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA{}^tB$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

V F c) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V F d) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

V F b) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

V F c) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

V F d) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V **F** b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

V **F** d) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V **F** b) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

V **F** c) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

V **F** d) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V **F** b) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

V **F** c) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

V **F** d) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V **F** b) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

V **F** c) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

V **F** d) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n\times n$, allora A e B sono invertibili.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^{\perp})^{\perp} = W^{\perp}$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

V F d) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

V F d) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V F b) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

V F c) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

V F c) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

V F d) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

V F c) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

V F d) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore della sua molteplicità algebrica.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, il polinomio caratteristico di AB è il prodotto del polinomio caratteristico di A per il polinomio caratteristico di B.

V **F** c) Un numero reale t è un autovalore reale di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ se e solo se t è radice del polinomio caratteristico di f.

V **F** d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il prodotto di due matrici reali 4×4 di rango 4 è sempre una matrice di rango 4.

V **F** b) Una matrice reale ha sempre lo stesso rango della sua trasposta.

V **F** c) Un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali ammette sempre almeno la soluzione nulla.

V **F** d) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango infinito.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

V **F** b) Il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ hanno sempre intersezione vuota.

V **F** c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha dimensione sempre non superiore a m.

V **F** d) Tutte le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$ sono fra loro simili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 0, z = 1$ sono fra loro parallele.

V **F** b) $(3727, 1723, 1432) \wedge (3727, 1723, 1432) = (0, 0, 0)$.

V **F** c) Esistono piani che non ammettono alcuna equazione cartesiana.

V **F** d) Il piano di equazione cartesiana $z = 3$ e la retta di equazione cartesiana $x - y + z = 1, z = 0$ sono fra loro paralleli.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il gruppo delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di somma è commutativo.

V **F** b) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di unione.

V **F** c) L'inclusione fra insiemi è una relazione di equivalenza.

V **F** d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se V è uno spazio vettoriale reale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $(\alpha+\beta)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$.

V **F** b) Non esiste alcun sottoinsieme linearmente dipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia incluso in una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$, allora $k \leq n$.

V **F** d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un numero infinito di basi.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A è una matrice reale, allora ${}^t({}^tA) = A$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

V **F** c) La somma di due matrici $n \times n$ invertibili è sempre invertibile.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e AB è la matrice nulla, allora almeno una delle due matrici A, B è non invertibile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Esistono vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** b) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

V **F** c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di basi ortonormali.

V **F** d) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $(W^\perp)^\perp = W^\perp$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se in una matrice reale 50×50 si inverte l'ordine delle righe (cioè si mette ogni riga i-esima all'$(n-i+1)$-esimo posto) si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante della prima matrice.

V **F** b) Ogni matrice reale $n \times n$ avente una riga nulla ha determinante nullo.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

V **F** d) Il determinante è una funzione multilineare rispetto alle colonne.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il polinomio caratteristico è invariante per trasposizione di matrici.

V F b) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette 0 come autovalore se e solo se non è iniettivo.

V F c) Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) L'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali che non ammettono sistemi di generatori.

V F b) Ogni sottoinsieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7\}$ di $\mathbb{R}^8$ è linearmente indipendente.

V F c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Ogni sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo è linearmente dipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali invertibili $n \times n$ è sempre commutativo.

V F b) La somma di due matrici simmetriche $n \times n$ è sempre una matrice simmetrica $n \times n$.

V F c) Non esiste alcuna matrice invertibile che abbia traccia nulla.

V F d) Se il prodotto AB di due matrici reali è la matrice identica $n\times n$, allora A e B sono invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se n è dispari ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è una isometria.

V F b) Ogni insieme di vettori di norma 1 a due a due ortogonali si può completare a una base ortonormale.

V F c) Sia W un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo V. Allora $\dim W = \dim V - \dim W^{\perp}$.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora $\|a\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.

V F b) Se A è una matrice associata a una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto a una base per $\mathbb{R}^n$ e una base per $\mathbb{R}^m$, allora $\dim \ker f = n - r(A)$.

V F c) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per Imf.

V F d) Esistono matrici del cambiamento di base di $\mathbb{R}^5$ che hanno righe tutte uguali fra loro.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se in una matrice reale tutte le righe sono linearmente indipendenti allora anche tutte le colonne sono linearmente indipendenti.

V F b) Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette un'unica soluzione se e solo se tutte le equazioni sono diverse fra loro.

V F c) Non esistono matrici reali $n \times n$ di rango 1.

V F d) Esiste un'unica matrice reale 5×5 completamente ridotta per righe di rango 3.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice reale $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) Ogni matrice a termini tutti positivi ha sempre determinante positivo.

V F d) Se una matrice reale A $m \times n$ possiede un minore M $m \times m$ con $\det M \neq 0$, allora $r(A) = m$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, allora il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

V F b) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 1$ e $x = 0, y = t, z = 1$ sono fra loro ortogonali.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle funzioni invertibili da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ rispetto all'usuale operazione di composizione è commutativo.

V F b) L'insieme $P(X)$ delle parti di un insieme X è un gruppo rispetto all'operazione di intersezione.

V F c) Ogni funzione invertibile è anche suriettiva.

V F d) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ è un campo.