

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.  
**V F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .  
**V F** d)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .  
**V F** b) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.  
**V F** c) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.  
**V F** d) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.  
**V F** b) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.  
**V F** c) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.  
**V F** d) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^tA$  hanno lo stesso rango.  
**V F** c) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .  
**V F** d) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .  
**V F** b) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .  
**V F** c) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.  
**V F** d) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .  
**V F** b) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.  
**V F** c) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.  
**V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.  
**V F** b) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** c) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** d) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.  
**V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .  
**V F** c) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .  
**V F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.  
**V F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.  
**V F** b) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .  
**V F** d) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.  
**V F** b) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0, x - y = 0$  e  $x + z = 0, x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1, z = 2$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.  
**V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .  
**V F** c) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .  
**V F** d) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.  
**V F** b) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.  
**V F** c) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.  
**V F** d) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.  
**V F** b) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.  
**V F** c) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.  
**V F** d) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.  
**V F** b) Tutti i campi sono anche anelli.  
**V F** c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** d) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.  
**V F** b) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .  
**V F** c) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im} f) \subseteq \ker f$ .  
**V F** d) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^t A \neq A$ .  
**V F** b) Se  $A, B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^t C {}^t B {}^t A$ .  
**V F** c) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.  
**V F** d) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .  
**V F** c) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.  
**V F** d) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.  
**V F** b) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .  
**V F** c) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.  
**V F** d) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .  
**V F** b) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.  
**V F** c) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .  
**V F** d) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.  
**V F** b) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.  
**V F** c) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.  
**V F** b) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.  
**V F** c) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.
- V F** b) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.
- V F** c) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.
- V F** d) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .
- V F** b) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^tA$  hanno lo stesso rango.
- V F** d) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .
- V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .
- V F** c) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.
- V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .
- V F** b) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1, z = 2$  sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.
- V F** d) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0, x - y = 0$  e  $x + z = 0, x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.
- V F** b) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.
- V F** c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.
- V F** d) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.
- V F** b) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im} f) \subseteq \ker f$ .
- V F** c) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .
- V F** d) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.
- V F** b) Tutti i campi sono anche anelli.
- V F** c) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.
- V F** d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .
- V F** c) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .
- V F** d) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .
- V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .
- V F** c) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.
- V F** d) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** c) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.
- V F** d) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.
- V F** b) Se  $A, B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$ .
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^tA \neq A$ .
- V F** d) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.
- V F** c) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.
- V F** d) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.
- V F** b) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.
- V F** c) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.
- V F** d) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.
- V F** c) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.
- V F** d) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^t A \neq A$ .
- V F** c) Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^t C {}^t B {}^t A$ .
- V F** d) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .
- V F** b) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.
- V F** c) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.
- V F** d) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^t A$  hanno lo stesso rango.
- V F** b) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.
- V F** c) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .
- V F** d) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .
- V F** b) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .
- V F** c) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .
- V F** d) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .
- V F** c) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.
- V F** d) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.
- V F** c) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.
- V F** d) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.
- V F** c) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.
- V F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.
- V F** b) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.
- V F** c) Tutti i campi sono anche anelli.
- V F** d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.
- V F** b) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .
- V F** d) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .
- V F** b) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .
- V F** d) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.
- V F** b) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.
- V F** c) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .
- V F** d) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .
- V F** c) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.
- V F** d)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .
- V F** b) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .
- V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .
- V F** d) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1, z = 2$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .
- V F** c) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0, x - y = 0$  e  $x + z = 0, x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** d) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.
- V F** b) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.
- V F** c) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.
- V F** d) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.
- V F** b) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.
- V F** c) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.
- V F** d) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .
- V F** b) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.
- V F** c) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im} f) \subseteq \ker f$ .
- V F** d) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.  
**V F** b) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.  
**V F** c) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** d) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$ .  
**V F** b) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.  
**V F** c) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^tA \neq A$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^tA$  hanno lo stesso rango.  
**V F** b) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .  
**V F** c) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.  
**V F** d) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .  
**V F** b) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.  
**V F** c) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .  
**V F** d) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .  
**V F** b) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.  
**V F** c) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0, x - y = 0$  e  $x + z = 0, x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1, z = 2$  sono fra loro ortogonali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i campi sono anche anelli.  
**V F** b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.  
**V F** d) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.  
**V F** b) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .  
**V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.  
**V F** b) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .  
**V F** d) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .  
**V F** b) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.  
**V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .  
**V F** d) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.
- V F** b) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im} f) \subseteq \ker f$ .
- V F** c) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.
- V F** d) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .
- V F** c) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.
- V F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.
- V F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.
- V F** d) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.
- V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.  
**V F** b) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.  
**V F** c) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.  
**V F** d) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .  
**V F** b) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.  
**V F** c) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.  
**V F** d) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .  
**V F** c) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .  
**V F** d) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.  
**V F** b) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.  
**V F** c) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.  
**V F** d) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** b) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** c) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.  
**V F** d) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.  
**V F** b) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.  
**V F** c) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.  
**V F** d) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .  
**V F** b) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.  
**V F** c) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .  
**V F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** b) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.  
**V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .  
**V F** b) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .  
**V F** c) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^tA$  hanno lo stesso rango.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .  
**V F** b) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.  
**V F** c) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .  
**V F** d) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.
- V F** b) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .
- V F** d) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.
- V F** c) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** d) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.
- V F** c) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .
- V F** d) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.
- V F** b) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.
- V F** d) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .
- V F** c) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.
- V F** d) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .
- V F** c) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.
- V F** d) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.
- V F** b) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.
- V F** c) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.
- V F** d) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.
- V F** c) Tutti i campi sono anche anelli.
- V F** d) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^tA \neq A$ .  
**V F** c) Se  $A, B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$ .  
**V F** d) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .  
**V F** b) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .  
**V F** d) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .  
**V F** b) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.  
**V F** c) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im}f) \subseteq \ker f$ .  
**V F** d) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.  
**V F** b) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.  
**V F** c) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.  
**V F** d) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1, z = 2$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** b) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0, x - y = 0$  e  $x + z = 0, x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.  
**V F** d) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .  
**V F** b) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^tA$  hanno lo stesso rango.  
**V F** d) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .  
**V F** c) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.  
**V F** d) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.  
**V F** b) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .  
**V F** d) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .  
**V F** b) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .  
**V F** c) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .  
**V F** d) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .  
**V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .  
**V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .  
**V F** d) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .  
**V F** b) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1, z = 2$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0, x - y = 0$  e  $x + z = 0, x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.  
**V F** b) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .  
**V F** c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** d) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.  
**V F** b) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.  
**V F** c) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.  
**V F** d) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.  
**V F** b) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.  
**V F** c) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.  
**V F** d) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.  
**V F** b) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.  
**V F** c) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.  
**V F** d) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .  
**V F** b) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.  
**V F** c) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** b) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.  
**V F** c) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.  
**V F** d) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$ .  
**V F** b) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^tA \neq A$ .  
**V F** d) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i campi sono anche anelli.  
**V F** b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.  
**V F** d) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .
- V F** b) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.
- V F** c) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.
- V F** d) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .
- V F** b) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.
- V F** c) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.
- V F** d) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im} f) \subseteq \ker f$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.
- V F** b) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.
- V F** c) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.
- V F** d) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.
- V F** c) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.
- V F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^t A \neq A$ .  
**V F** b) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.  
**V F** c) Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^t C {}^t B {}^t A$ .  
**V F** d) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .  
**V F** b) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^t A$  hanno lo stesso rango.  
**V F** d) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.  
**V F** b) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .  
**V F** c) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .  
**V F** d) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.  
**V F** b) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.  
**V F** c) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.  
**V F** b) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** c) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.  
**V F** d) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .
- V F** b) Sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .
- V F** c) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.
- V F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.
- V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** b) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** c) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.
- V F** d) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.
- V F** b) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.
- V F** c) Tutti i campi sono anche anelli.
- V F** d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .  
**V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .  
**V F** c) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.  
**V F** d) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .  
**V F** c) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.  
**V F** d) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.  
**V F** b) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.  
**V F** c) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.  
**V F** d) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .  
**V F** b)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.  
**V F** c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** d) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.  
**V F** b) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.  
**V F** c) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.  
**V F** d) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.  
**V F** b) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.  
**V F** c) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.  
**V F** d) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .  
**V F** b) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0, x - y = 0$  e  $x + z = 0, x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.  
**V F** d) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1, z = 2$  sono fra loro ortogonali.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.  
**V F** b) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im} f) \subseteq \ker f$ .  
**V F** c) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .  
**V F** d) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .  
**V F** c) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .  
**V F** d) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^tA$  hanno lo stesso rango.  
**V F** b) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .  
**V F** c) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .  
**V F** d) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.  
**V F** b) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.  
**V F** c) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .  
**V F** b) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.  
**V F** c) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .  
**V F** d) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .  
**V F** b) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .  
**V F** c) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.  
**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1, z = 2$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .
- V F** c) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.
- V F** d) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0, x - y = 0$  e  $x + z = 0, x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.
- V F** b) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** c) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.
- V F** b) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.
- V F** c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) Tutti i campi sono anche anelli.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.
- V F** c) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.
- V F** d) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^t A \neq A$ .
- V F** c) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.
- V F** d) Se  $A, B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^t C {}^t B {}^t A$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.  
**V F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.  
**V F** d) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .  
**V F** b) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .  
**V F** d) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.  
**V F** b) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.  
**V F** c) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.  
**V F** d) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.  
**V F** b) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.  
**V F** c) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .  
**V F** d) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.  
**V F** b) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .  
**V F** c) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im} f) \subseteq \ker f$ .  
**V F** d) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.  
**V F** b) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.  
**V F** c) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.  
**V F** d) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.  
**V F** b) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** c) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** d) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.  
**V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.  
**V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .  
**V F** c) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .  
**V F** d) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .
- V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .
- V F** c) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.
- V F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.
- V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.
- V F** b) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.
- V F** c) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.
- V F** d) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .
- V F** b) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.
- V F** c) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.
- V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** c) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.
- V F** d) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.
- V F** c) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .
- V F** d) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.
- V F** b) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.
- V F** d) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.
- V F** b) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^tA$  hanno lo stesso rango.
- V F** d) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .
- V F** b) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.
- V F** c) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .
- V F** d) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.
- V F** b) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.
- V F** c) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.
- V F** d) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.
- V F** b) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.
- V F** c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) Tutti i campi sono anche anelli.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .
- V F** b) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.
- V F** c) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .
- V F** d) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0$ ,  $x - y = 0$  e  $x + z = 0$ ,  $x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .
- V F** c) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1$ ,  $z = 2$  sono fra loro ortogonali.
- V F** d) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^t A \neq A$ .
- V F** b) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.
- V F** c) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.
- V F** d) Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^t C {}^t B {}^t A$ .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.  
**V F** b) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** c) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.  
**V F** d) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .  
**V F** b) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.  
**V F** c) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.  
**V F** d) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im} f) \subseteq \ker f$ .  
**V F** b) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.  
**V F** c) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.  
**V F** d) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .  
**V F** b) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .  
**V F** c) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .  
**V F** d) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^tA$  hanno lo stesso rango.  
**V F** b) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.  
**V F** c) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .  
**V F** d) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .  
**V F** b) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .  
**V F** c) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.  
**V F** d) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .  
**V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .  
**V F** c) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.  
**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .  
**V F** b) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1, z = 2$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.  
**V F** d) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0, x - y = 0$  e  $x + z = 0, x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .  
**V F** c) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.  
**V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.
- V F** b) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.
- V F** c) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.
- V F** b) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .
- V F** c) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.
- V F** d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.
- V F** b) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.
- V F** c) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .
- V F** d) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.
- V F** b) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.
- V F** c) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.
- V F** d) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.
- V F** b) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** c) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.
- V F** d) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.
- V F** c) Tutti i campi sono anche anelli.
- V F** d) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.
- V F** b) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.
- V F** c) Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$ .
- V F** d) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^tA \neq A$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.
- V F** c) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** d) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.
- V F** b) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im}f) \subseteq \ker f$ .
- V F** c) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .
- V F** d) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.  
**V F** b) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.  
**V F** c) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.  
**V F** d) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .  
**V F** b) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.  
**V F** c) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .  
**V F** d) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** b) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.  
**V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .  
**V F** c) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .  
**V F** d) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .  
**V F** b) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .  
**V F** c) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.  
**V F** d) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .  
**V F** c) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.  
**V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** b) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** c) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.  
**V F** d) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i campi sono anche anelli.  
**V F** b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.  
**V F** d) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .
- V F** b) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .
- V F** c) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.
- V F** d) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.
- V F** d) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.
- V F** b) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.
- V F** c) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.
- V F** d) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A, B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$ .
- V F** b) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^tA \neq A$ .
- V F** d) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^tA$  hanno lo stesso rango.
- V F** b) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.
- V F** c) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .
- V F** d) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.  
**V F** b) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .  
**V F** c) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.  
**V F** d) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** b) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.  
**V F** c) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .  
**V F** d)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.  
**V F** b) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.  
**V F** c) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.  
**V F** d) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.  
**V F** b) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.  
**V F** c) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.  
**V F** d) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .
- V F** b) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .
- V F** c) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .
- V F** d) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .
- V F** c) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.
- V F** d) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .
- V F** b) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .
- V F** c) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.
- V F** d) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1, z = 2$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0, x - y = 0$  e  $x + z = 0, x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .
- V F** d) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im} f) \subseteq \ker f$ .
- V F** b) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.
- V F** c) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.
- V F** d) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale simmetrica la molteplicità geometrica di ogni suo autovalore  $t$  coincide con la molteplicità algebrica di  $t$ .
- V F** b) Due matrici reali  $2 \times 2$  hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se hanno la stessa traccia e lo stesso determinante.
- V F** c) Se  $f$  e  $g$  sono due endomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono  $t$  come autovalore, allora anche  $f + g$  è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che ammette  $t$  come autovalore.
- V F** d) Un endomorfismo di  $\mathbb{R}^7$  è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a 7.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è la matrice associata a una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  rispetto alle basi canoniche, allora  $f$  è iniettiva se e solo se il rango di  $A$  è uguale a  $m$ .
- V F** b) Se  $A$  è una matrice reale quadrata allora  $A$  e  $A + {}^tA$  hanno lo stesso rango.
- V F** c) Esistono sistemi lineari a coefficienti reali che ammettono esattamente due soluzioni.
- V F** d) L'unica matrice reale  $n \times n$  di rango  $n$  è la matrice identica  $n \times n$ .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici di cambiamento di base che hanno determinante nullo.
- V F** b) Se  $f : V \rightarrow V$  è un endomorfismo e  $f^2$  è l'identità di  $V$ , allora  $f$  è l'identità di  $V$ .
- V F** c) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ .
- V F** d) Esiste una trasformazione lineare  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(1) = 2$  e  $f(3) = 5$ .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Le rette di  $\mathbb{R}^3$  di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = 0$ ,  $x - y = 0$  e  $x + z = 0$ ,  $x - z = 0$  sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , allora  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ .
- V F** c) Se due piani ammettono la stessa equazione parametrica, allora coincidono.
- V F** d) Il piano di equazione cartesiana  $z = 1$  e la retta di equazione cartesiana  $x - 3y + 4z = 1$ ,  $z = 2$  sono fra loro ortogonali.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i gruppi che contengono esattamente 6 elementi sono commutativi.  
**V F** b) Tutti i campi sono anche anelli.  
**V F** c) La composizione di quattro permutazioni dispari su un insieme di sette elementi è sempre una permutazione pari.  
**V F** d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali dove l'operazione di somma non è associativa.  
**V F** b) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione 9 che non sono fra loro isomorfi.  
**V F** c) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente se e solo se è una base di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** d) In tutti gli spazi vettoriali non banali esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  è una matrice reale non diagonale, allora  ${}^tA \neq A$ .  
**V F** b) Se  $A, B$  e  $C$  sono tre matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$ .  
**V F** c) Il prodotto di due matrici  $n \times n$  diagonali è sempre una matrice diagonale.  
**V F** d) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è sempre una matrice non invertibile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare  $\bullet$  su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  si ha che  $|\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}| \geq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ .  
**V F** b) Tutti gli automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  sono isometrie di  $V$ .  
**V F** c) Ogni base ortogonale è anche ortonormale.  
**V F** d) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora tutti i vettori di  $W$  sono ortogonali a tutti i vettori di  $W^\perp$ .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice quadrata reale e la sua trasposta hanno sempre lo stesso determinante.  
**V F** b) Ogni matrice reale  $n \times n$  avente tutti i termini di una riga uguali a 1 ha determinante nullo.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  $\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A)$ .  
**V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  hanno lo stesso determinante allora sono simili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente gli spazi vettoriali si devono intendere finitamente generati, le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici quadrate reali fra loro simili che hanno polinomi caratteristici differenti.  
**V F** b) Esistono automorfismi di  $\mathbb{R}^n$  che ammettono 0 come autovalore.  
**V F** c) Esiste almeno una matrice reale simmetrica che non è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** d) Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  può essere l'autospazio di un autovalore reale di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni spazio vettoriale finito ammette almeno una base.  
**V F** b) Ogni sottoinsieme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{20}\}$  di  $\mathbb{R}^{12}$  è linearmente dipendente.  
**V F** c) L'unione di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ .  
**V F** d) Esistono spazi vettoriali privi del vettore nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il prodotto fra matrici reali  $n \times n$  è sempre distributivo rispetto alla somma.  
**V F** b) Non esistono matrici che siano contemporaneamente simmetriche e antisimmetriche.  
**V F** c) L'inversa di una matrice invertibile è sempre invertibile.  
**V F** d) Se il prodotto  $AB$  di due matrici reali  $n \times n$  è una matrice invertibile  $n \times n$ , allora  $A$  e  $B$  sono invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione inversa di una isometria è sempre una isometria.  
**V F** b) Ogni insieme di vettori di norma 1 si può completare a una base ortonormale.  
**V F** c) Sia  $W$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$ . Allora  $\dim W = \dim \left( (W^\perp)^\perp \right)^\perp$ .  
**V F** d) Sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Allora  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e ogni  $a \in \mathbb{R}$ .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Per ogni endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che  $f(\text{Im} f) \subseteq \ker f$ .  
**V F** b) Esiste un unico endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che manda  $(1, 3, 8)$  in  $(4, 7, 9)$ .  
**V F** c) La funzione da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^5$  che manda ogni vettore di  $\mathbb{R}^5$  in  $(1, 1, 1, 1, 1)$  è una trasformazione lineare.  
**V F** d) Esistono matrici del cambiamento di base di  $\mathbb{R}^2$  che hanno determinante negativo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice quadrata reale tutte le colonne sono linearmente indipendenti allora anche tutte le righe sono linearmente indipendenti.  
**V F** b) Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite ammette un'unica soluzione se e solo se il determinante della sua matrice incompleta è non nullo.  
**V F** c) Tutti i sistemi lineari omogenei ammettono almeno una soluzione.  
**V F** d) Se due matrici ammettono una stessa forma ridotta per righe allora hanno lo stesso rango.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$  e  $\det(A^n) = \det(B^n)$  per ogni  $n > 0$ , allora  $A = B$ .  
**V F** b) Per ogni  $n > 1$  esistono infinite matrici reali non invertibili di ordine  $n$ .  
**V F** c) Il determinante di una matrice ortogonale è sempre diverso da 2.  
**V F** d) Se una matrice reale  $A$   $n \times n$  ha determinante nullo, allora  $r(A) = n - 1$ .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^3$ :

- V F** a) Se  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , allora il vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}$  ha norma 1.  
**V F** b) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a una retta data.  
**V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane  $x + y = -1$  e  $z = 1$  sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) Le rette di rispettive equazioni parametriche  $x = t, y = t, z = t$  e  $x = -t, y = -t, z = -t$  sono fra loro ortogonali.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Per ogni  $n > 0$  esiste almeno un gruppo di cardinalità  $n$ .  
**V F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) Componendo una funzione iniettiva con una suriettiva si ottiene una funzione biunivoca.  
**V F** d)  $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$  è un campo.