

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.
- V F** b) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.
- V F** c) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** d) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.
- V F** b) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
- V F** c) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
- V F** b) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .
- V F** c) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
- V F** b) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.
- V F** d) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.  
**V F** b) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** c) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.  
**V F** d) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.  
**V F** b) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .  
**V F** d) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.  
**V F** b) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.  
**V F** c) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.  
**V F** d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .  
**V F** b) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.  
**V F** c) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.  
**V F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.  
**V F** b) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.  
**V F** c) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.  
**V F** d) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .  
**V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.  
**V F** c) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.  
**V F** d) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.  
**V F** b) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .  
**V F** c) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** d) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .  
**V F** b) Ogni prodotto scalare è anche una norma.  
**V F** c) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .  
**V F** d) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .  
**V F** b) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.  
**V F** c) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .  
**V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.
- V F** c) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.
- V F** d) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** b)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.
- V F** c)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
- V F** b) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.
- V F** c) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.
- V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .
- V F** c) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.
- V F** d) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.
- V F** b) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** c) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.  
**V F** b) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.  
**V F** c) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.  
**V F** d) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .  
**V F** b) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.  
**V F** c) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .  
**V F** c) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.  
**V F** d) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.  
**V F** b) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.  
**V F** c) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.  
**V F** d) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.  
**V F** b) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.  
**V F** c) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** d) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.
- V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.
- V F** c) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** b) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .
- V F** c) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .
- V F** d) Ogni prodotto scalare è anche una norma.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** b) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** c) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.
- V F** d) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.
- V F** c) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.
- V F** d) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.
- V F** b) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.
- V F** c) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** d) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .
- V F** b) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.
- V F** d) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
- V F** b)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.
- V F** c) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** d)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .
- V F** b) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** d) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.
- V F** b) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.
- V F** d) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.  
**V F** b) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.  
**V F** c) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .  
**V F** c) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.  
**V F** d) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.  
**V F** b) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.  
**V F** c) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** d) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .  
**V F** b) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .  
**V F** c) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.  
**V F** d) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.  
**V F** b) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** c) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.  
**V F** d) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.  
**V F** b) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .  
**V F** d) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.  
**V F** b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.  
**V F** c) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .  
**V F** d) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.  
**V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.  
**V F** c) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.  
**V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.  
**V F** c) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .  
**V F** d) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.  
**V F** b) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.  
**V F** c) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.  
**V F** d) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.  
**V F** b) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.  
**V F** d) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.  
**V F** b) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.  
**V F** c) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.  
**V F** b) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.  
**V F** c)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.  
**V F** d)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.  
**V F** b) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.  
**V F** c) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.  
**V F** d) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.  
**V F** b) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .  
**V F** c) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.  
**V F** d) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.  
**V F** b) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** c) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.  
**V F** d) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.  
**V F** b) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** c) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.  
**V F** d) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .
- V F** b) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** c) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
- V F** d) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .
- V F** d) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.
- V F** b) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .
- V F** c) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .
- V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .
- V F** b) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** c) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.
- V F** b) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
- V F** c) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.  
**V F** b) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.  
**V F** c) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.  
**V F** d) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .  
**V F** b) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.  
**V F** c) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.  
**V F** d) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.  
**V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.  
**V F** c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.  
**V F** d) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.  
**V F** c) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.  
**V F** d) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.  
**V F** b) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.  
**V F** c) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .  
**V F** d) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.  
**V F** b)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.  
**V F** d) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .  
**V F** c) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.  
**V F** d) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.  
**V F** b) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.  
**V F** c) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.  
**V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.  
**V F** b) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .  
**V F** c) Ogni prodotto scalare è anche una norma.  
**V F** d) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.  
**V F** b) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.  
**V F** c) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .  
**V F** d) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.  
**V F** b) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.  
**V F** c) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .  
**V F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.  
**V F** b) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.  
**V F** c) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** d) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.  
**V F** b) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.  
**V F** c) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.  
**V F** b) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.  
**V F** d) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.
- V F** b) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
- V F** c) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
- V F** d) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- V F** b) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** c) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .
- V F** b) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .
- V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .
- V F** d) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** b) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.
- V F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.  
**V F** c) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.  
**V F** d) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.  
**V F** b) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .  
**V F** c) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.  
**V F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.  
**V F** b) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.  
**V F** d) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.  
**V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.  
**V F** c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.  
**V F** d) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .
- V F** b) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.
- V F** c) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.
- V F** d) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.
- V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .
- V F** c) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.
- V F** d) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.
- V F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.
- V F** c) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.
- V F** b) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** c) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** d) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
- V F** b) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
- V F** c) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .
- V F** b) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
- V F** c) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .
- V F** d) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** c) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.
- V F** d) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.
- V F** b) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.
- V F** d) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** c)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.
- V F** d) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.
- V F** b) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .
- V F** d) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.  
**V F** b) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .  
**V F** c) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.  
**V F** d) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.  
**V F** b) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.  
**V F** c) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.  
**V F** d) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.  
**V F** b) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .  
**V F** c) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .  
**V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** b) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .  
**V F** c) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.  
**V F** d) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.
- V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
- V F** c) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.
- V F** b) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.
- V F** c) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.
- V F** d) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.
- V F** b) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** c) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** d) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .
- V F** b) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.
- V F** c) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** d) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.  
**V F** b) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .  
**V F** c) Ogni prodotto scalare è anche una norma.  
**V F** d) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.  
**V F** b) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** c) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .  
**V F** d) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** b) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** c) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.  
**V F** d) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.  
**V F** b) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** c) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.  
**V F** d) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.  
**V F** b) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.  
**V F** c) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** d) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.  
**V F** b) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.  
**V F** c) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** d) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.  
**V F** b) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .  
**V F** c) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .  
**V F** d) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.  
**V F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.  
**V F** c) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** d) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .  
**V F** b) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.  
**V F** c) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.  
**V F** d) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.  
**V F** b)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.  
**V F** d) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.  
**V F** b) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .  
**V F** c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.  
**V F** d) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.  
**V F** b) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.  
**V F** c) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .  
**V F** d) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.  
**V F** b) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .  
**V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .  
**V F** d) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.  
**V F** b) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.  
**V F** c) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.  
**V F** d) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.  
**V F** b) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.  
**V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .  
**V F** d) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.  
**V F** b) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.  
**V F** c) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.  
**V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.  
**V F** b) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .  
**V F** c) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .  
**V F** b) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.  
**V F** c) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.  
**V F** d) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.
- V F** c) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.
- V F** d) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** b) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.
- V F** c) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .
- V F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.
- V F** b) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.
- V F** c) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.
- V F** d) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** b) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.
- V F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** b) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
- V F** c)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.
- V F** d)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.  
**V F** b) Ogni prodotto scalare è anche una norma.  
**V F** c) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .  
**V F** d) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.  
**V F** b) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.  
**V F** c) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.  
**V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** b) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.  
**V F** c) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.  
**V F** d) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** b) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** c) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.  
**V F** d) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .
- V F** b) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .
- V F** c) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.
- V F** d) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.
- V F** c) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .
- V F** d) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .
- V F** c) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.
- V F** d) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .
- V F** b) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.
- V F** d) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .
- V F** b) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** d) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.
- V F** c) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.
- V F** d) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.
- V F** c) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.
- V F** d) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.
- V F** c) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .
- V F** d) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .
- V F** b) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** c) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .
- V F** d) Ogni prodotto scalare è anche una norma.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .  
**V F** b) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.  
**V F** c) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.  
**V F** d) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .  
**V F** c) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.  
**V F** d) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.  
**V F** b) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.  
**V F** c)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** d)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.  
**V F** b) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** c) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.  
**V F** d) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.  
**V F** b) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.  
**V F** c) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.  
**V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.
- V F** c) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.
- V F** d) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** c) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** d) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.
- V F** b) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .
- V F** c) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
- V F** b) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
- V F** c) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.
- V F** d) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .
- V F** b) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.
- V F** c) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .
- V F** b) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.
- V F** c) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .
- V F** d) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** b) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** c) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.
- V F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.
- V F** c) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.
- V F** d) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.
- V F** b) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** c) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.
- V F** d) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.  
**V F** b) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.  
**V F** c) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .  
**V F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.  
**V F** b) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.  
**V F** c) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.  
**V F** d) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.  
**V F** c) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.  
**V F** d) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.  
**V F** b) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .  
**V F** c) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.  
**V F** d) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.  
**V F** b) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.  
**V F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.  
**V F** d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.  
**V F** b) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** c) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** d) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.  
**V F** b) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.  
**V F** c) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** d) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.  
**V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.  
**V F** c) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.  
**V F** d) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.  
**V F** b) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.  
**V F** c) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** d) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .
- V F** b) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .
- V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .
- V F** d) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.
- V F** b) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
- V F** c)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** b) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- V F** c) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .
- V F** b) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** c) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** d) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.
- V F** b) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.
- V F** c) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.
- V F** d) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.
- V F** c) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.
- V F** d) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** b) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.
- V F** c) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** d) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
- V F** c) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .
- V F** d) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
- V F** b) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** c) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .
- V F** d) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
- V F** c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.
- V F** d) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** b) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.
- V F** c) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.
- V F** d) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** b) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .
- V F** c) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .
- V F** d) Ogni prodotto scalare è anche una norma.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** b) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** c) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.
- V F** d) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.
- V F** b) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.
- V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .
- V F** d) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.
- V F** b) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** c) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.
- V F** d) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** c) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.
- V F** d) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.
- V F** b) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.
- V F** d) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** c) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
- V F** d) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.
- V F** b) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.
- V F** c) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.
- V F** d) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.
- V F** c)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.
- V F** d) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.
- V F** b) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.
- V F** c) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .
- V F** d) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.
- V F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.
- V F** c) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .
- V F** b) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.
- V F** d) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .
- V F** b) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .
- V F** c) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.
- V F** d) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.
- V F** b) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .
- V F** c) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.
- V F** b) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.
- V F** d) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .
- V F** b) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** d) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .  
**V F** b) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.  
**V F** c) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.  
**V F** d) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.  
**V F** b) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.  
**V F** c) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .  
**V F** d) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.  
**V F** b) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.  
**V F** c) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.  
**V F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.  
**V F** b)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.  
**V F** c) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.  
**V F** d) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.  
**V F** b) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.  
**V F** c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.  
**V F** d) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.
- V F** b) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.
- V F** c) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** d) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.
- V F** b) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.
- V F** c) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .
- V F** b) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.
- V F** c) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.
- V F** d) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** b) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
- V F** c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.
- V F** d) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.  
**V F** b) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.  
**V F** c) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** d) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.  
**V F** b) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.  
**V F** c) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.  
**V F** d) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .  
**V F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .  
**V F** c) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .  
**V F** d) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .  
**V F** b) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.  
**V F** c) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.  
**V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .
- V F** b) Ogni prodotto scalare è anche una norma.
- V F** c) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.
- V F** d) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- V F** b) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** c) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.
- V F** d) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** b) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .
- V F** c) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .
- V F** b) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .
- V F** c) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .
- V F** c) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
- V F** d) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** b) Esistono matrici diagonalizzabili non invertibili.
- V F** c) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ha determinante nullo.
- V F** d) Se due matrici reali  $n \times n$  sono fra loro simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 5 incognite ammette almeno una soluzione non nulla.
- V F** b) In un sistema lineare di 8 equazioni in 5 incognite esiste sempre almeno un'equazione che è combinazione lineare delle rimanenti.
- V F** c) Ogni sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite ammette infinite soluzioni.
- V F** d) Ogni sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice completa abbia rango  $n$  ammette soluzione.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano  $f$  e  $g$  due trasformazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ . Se  $f$  e  $g$  coincidono sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora coincidono ovunque.
- V F** b) Non esistono applicazioni lineari suriettive da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$ .
- V F** c) La funzione nulla da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  è una trasformazione lineare.
- V F** d) La funzione inversa di un automorfismo di uno spazio vettoriale  $V$  è sempre un automorfismo di  $V$ .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  due punti  $P, Q$  e un piano  $\pi$ . Esiste allora una e una sola retta che contenga  $P$  e  $Q$  e sia parallela a  $\pi$ .
- V F** b) La relazione di parallelismo fra piani di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Se due vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono ortogonali fra loro e non nulli, allora il loro prodotto vettoriale è non nullo.
- V F** d) La composizione di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è sempre una isometria di  $\mathbb{R}^n$ .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  delle classi di resto modulo 3 non è commutativo.  
**V F** b)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  è un campo.  
**V F** c) Esistono campi che non sono anelli rispetto alle operazioni date.  
**V F** d)  $\mathbb{Z}$  non è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x+1) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.  
**V F** b) Tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^9$  di cardinalità 10 sono linearmente dipendenti.  
**V F** c) Due sistemi di generatori per  $\mathbb{R}^n$  hanno sempre la stessa cardinalità.  
**V F** d) Ogni sottoinsieme non vuoto di un insieme linearmente indipendente di  $\mathbb{R}^n$  è linearmente indipendente.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due matrici reali si possono sempre sommare tra loro.  
**V F** b) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici reali  $n \times n$ , allora  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .  
**V F** c) Non esistono matrici ortogonali simmetriche.  
**V F** d) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  con  $\det A = 0$  esiste un numero naturale  $k$  tale che  $A^k$  è la matrice nulla.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni prodotto scalare è anche una norma.  
**V F** b) Una norma su  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere una trasformazione lineare.  
**V F** c) Sia  $U$  un sottospazio vettoriale euclideo di uno spazio vettoriale euclideo  $V$  di dimensione finita  $n$ . Allora  $\dim({}^\perp U) = n - \dim U$ .  
**V F** d) Due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dello spazio vettoriale euclideo standard  $\mathbb{R}^n$  sono fra loro ortogonali se e solo se  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se  $A$  è una matrice quadrata reale invertibile, allora  $\det A^{-1} = 1/\det A$ .  
**V F** b) Il determinante di una matrice triangolare  $8 \times 8$  è sempre non negativo.  
**V F** c) Se una matrice quadrata reale ha determinante nullo, allora ha almeno una riga nulla.  
**V F** d) La somma di due matrici reali  $n \times n$  non invertibili è non invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo  $k$ ,  $m$  ed  $n$  indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  non può mai essere nulla.
- V F** b) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile per similitudine.
- V F** c) Esistono infiniti endomorfismi di  $\mathbb{R}^7$  il cui polinomio caratteristico ammette solo la radice nulla.
- V F** d) 1 è autovalore di ogni matrice ortogonale  $n \times n$  con  $n$  dispari e determinante positivo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle funzioni  $f$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  strettamente crescenti è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) La base di uno spazio vettoriale è sempre un insieme finito.
- V F** c) Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una variabile ammette infinite basi distinte.
- V F** d) Lo spazio vettoriale reale delle successioni costanti ha dimensione infinita.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali  $3 \times 3$  invertibili è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto.
- V F** b) Non esistono matrici invertibili con determinante uguale a  $-1$ .
- V F** c) Le potenze di una matrice invertibile sono tutte matrici invertibili.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se la sua trasposta è invertibile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Esistono esattamente 5 prodotti scalari definiti sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^5$ .
- V F** b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette più d'una base ortonormale.
- V F** c) In  $\mathbb{R}^9$  esiste un insieme di 10 vettori non nulli a due a due ortogonali.
- V F** d) I vettori di una base ortonormale hanno sempre norma 1.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La relazione di similitudine fra matrici reali  $n \times n$  è una relazione di equivalenza.
- V F** b) Ogni endomorfismo iniettivo di  $\mathbb{R}^n$  è anche suriettivo.
- V F** c) Una matrice associata a un isomorfismo è sempre invertibile.
- V F** d) Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è un isomorfismo allora  $m = n$ .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzione se e solo se la sua matrice completa ha rango strettamente maggiore del massimo fra  $m$  e  $n$ .
- V F** b) Esiste almeno un esempio di trasformazione lineare la cui immagine ha dimensione nulla.
- V F** c) Per ogni matrice reale  $A$  il rango di  $A$  coincide con il rango di  $2A$ .
- V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 8 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^8$ .

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice triangolare ha determinante nullo se e solo se un elemento della sua diagonale principale è nullo.
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** c) Se  $A, B$  sono matrici reali  $n \times n$  allora  $\det(AB) = \det(BA)$ .
- V F** d) Per ogni matrice quadrata reale  $A$  si ha che  $\det(-A) = \det A$ .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) I piani di  $\mathbb{R}^3$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -1$  e  $x - y - z = 1$  non sono fra loro ortogonali.
- V F** b) L'ortogonalità fra rette di  $\mathbb{R}^3$  è una relazione di equivalenza.
- V F** c) Il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  è associativo.
- V F** d) Un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  è una isometria rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica è diagonale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme degli interi dispari è un gruppo rispetto all'usuale operazione di somma.
- V F** b) Il campo dei reali e quello dei razionali sono fra loro isomorfi.
- V F** c) Tutti gli anelli finiti sono fra loro isomorfi.
- V F** d) L'insieme degli interi multipli di 3 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.