

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).
- V F** b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
- V F** c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.
- V F** d) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
- V F** b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.
- V F** d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
- V F** b) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V} è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
- V F** c) Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
- V F** d) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.
- V F** b) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
- V F** c) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

5) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .
V F b) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
V F c) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.
V F b) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
V F c) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.
V F d) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .

7) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.
V F b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
V F c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.
V F d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.
V F b) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
V F c) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.
V F d) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim {}^\perp\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.
V F b) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.
V F d) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .
- V F** b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.
- V F** c) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
- V F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.
- V F** b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** d) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp\mathbf{U}$.
- V F** b) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.
- V F** c) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.
- V F** d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \|$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .
- V F** b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.
- V F** c) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
- V F** d) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.
V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.
V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.
V F b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.
V F c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.
V F d) Non esistono campi con infiniti elementi.

7) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.
V F b) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.
V F c) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
V F d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F b) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .
V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .
V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

9) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .
V F b) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.
V F c) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .
V F d) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .
V F b) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
V F d) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

2) Siano **V** e **W** due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.
V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F c) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di **V**, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di **W**.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia **U** un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . **U** ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .
V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.
V F c) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
V F d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.

4) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .
V F b) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .
V F c) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .
V F d) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.
V F b) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
V F c) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale **V** è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
V F d) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.
V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
V F d) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \|$.
V F b) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.
V F c) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp \mathbf{U}$.
V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.
V F c) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.
V F d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.
V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).
V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
V F d) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

2) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.
- V F** b) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
- V F** c) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.
- V F** d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono campi con infiniti elementi.
- V F** b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.
- V F** d) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.
- V F** b) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
- V F** c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.
- V F** d) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
V F b) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.
V F c) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim \perp \mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.
V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.

6) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.
V F c) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.
V F b) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .
V F c) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.
V F c) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.
V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .
V F b) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
V F c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.
V F d) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F b) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.
V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.
V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.
V F b) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F c) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .
V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
V F b) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = \dim \mathbf{U} - 1$.
V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.
V F d) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
V F b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.
V F c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.
V F d) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

5) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .
V F c) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.
V F d) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.
V F c) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .
V F d) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

7) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
V F b) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.
V F d) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
V F b) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
V F c) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono campi con infiniti elementi.
V F b) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.
V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.
V F d) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .
V F b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .
V F c) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.
V F d) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.
V F b) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .
V F c) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
V F b) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.
V F c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
V F b) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.
V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).
V F d) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.
- V F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \|$.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.
- V F** d) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp \mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.
- V F** d) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.
- V F** b) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .
- V F** c) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
- V F** d) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V} è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
- V F** b) Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
- V F** d) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

9) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.
- V F** b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.
- V F** c) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
- V F** d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.
V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F d) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .
V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .
V F c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.
V F d) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
V F c) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.
V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

4) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .
V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.
V F b) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.
V F c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.
- V F** b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.
- V F** c) Non esistono campi con infiniti elementi.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
- V F** b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.
- V F** c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.
- V F** d) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .

8) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .
- V F** b) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .
- V F** c) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.
- V F** d) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \|$.
- V F** b) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp \mathbf{U}$.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.
- V F** d) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.
V F b) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
V F c) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.
V F d) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.
V F b) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.
V F d) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = \dim \mathbf{U} - 1$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).
V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
V F c) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.
V F d) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.
V F b) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
V F c) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.
V F d) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
- V F** b) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V} è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
- V F** c) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.
- V F** d) Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
- V F** b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
- V F** c) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .
- V F** d) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .
- V F** b) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
- V F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.
- V F** d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .
- V F** b) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
- V F** c) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .
- V F** d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.

9) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.
- V F** b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
- V F** c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.
- V F** d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V} è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
- V F** b) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.
- V F** c) Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
- V F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.
- V F** c) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.
- V F** d) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim {}^\perp \mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
- V F** b) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.
- V F** b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
- V F** c) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.
- V F** d) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.

5) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.
V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .
V F d) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .
V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.
V F c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.
V F d) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.

7) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.
V F c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.
V F d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
V F b) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.
V F c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.
V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .
V F c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.
V F d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.
- V F** b) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.
- V F** c) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp\mathbf{U}$.
- V F** d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \|$.

2) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .
- V F** b) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.
- V F** c) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .
- V F** d) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** b) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.
- V F** c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.
- V F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.
- V F** c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.
- V F** d) Non esistono campi con infiniti elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** c) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .
- V F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.
- V F** b) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .
- V F** c) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
- V F** d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.

7) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.
- V F** b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.
- V F** c) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
- V F** d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.
- V F** b) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .
- V F** c) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
- V F** d) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.
- V F** c) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.
- V F** d) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.
V F b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.
V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
V F d) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .
V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.
V F c) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
V F d) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.

3) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .
V F b) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .
V F c) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.
V F d) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .

4) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.
V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .
V F c) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
V F d) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \|$.
- V F** b) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.
- V F** d) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp \mathbf{U}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.
- V F** d) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.
- V F** b) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.
- V F** c) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
- V F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .
- V F** b) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.
- V F** c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
- V F** d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.
- V F** b) Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
- V F** c) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V} è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.
V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
V F c) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.
V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.
V F b) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .
V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.
V F d) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .

3) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.
V F c) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F d) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .
V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .
V F c) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.
V F b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.
V F c) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.
V F d) Non esistono campi con infiniti elementi.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.
V F c) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim \perp \mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.
V F d) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.

7) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.
V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.
V F c) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.
V F d) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.
V F b) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .
V F c) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .
V F d) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
V F b) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.
V F c) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.
V F c) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .
V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
V F b) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.
V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
V F d) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

3) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F b) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.
V F c) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.
V F b) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .
V F c) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
V F d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.
V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.
V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.
- V F** b) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
- V F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.
- V F** d) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim {}^\perp \mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
- V F** c) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.
- V F** d) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

8) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.
- V F** b) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
- V F** c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.
- V F** d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.
- V F** b) Non esistono campi con infiniti elementi.
- V F** c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.
- V F** d) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \|$.
- V F** b) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.
- V F** c) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp \mathbf{U}$.
- V F** d) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.

2) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .
- V F** b) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.
- V F** c) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .
- V F** d) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.
- V F** b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .
- V F** c) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
- V F** d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.
- V F** b) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.
- V F** c) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
- V F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
- V F** c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.
- V F** d) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
- V F** b) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.
- V F** c) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V} è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.
- V F** c) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.
- V F** d) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.

8) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.
- V F** b) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
- V F** c) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.
- V F** d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.
- V F** b) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
- V F** c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.
- V F** d) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
- V F** b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
- V F** c) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.
- V F** d) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.

2) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .
- V F** b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .
- V F** c) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .
- V F** d) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.

3) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
- V F** b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- V F** c) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.
- V F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.
- V F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
- V F** c) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp\mathbf{U}$.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.
- V F** c) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.
- V F** d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
- V F** b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.
- V F** c) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .
- V F** d) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono campi con infiniti elementi.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.
- V F** c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.
- V F** d) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- V F** b) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.
- V F** b) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .
- V F** d) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.
V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).
V F d) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.
V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.
V F c) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
V F d) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.
V F b) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V} è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
V F c) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
V F d) Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .
V F b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
V F c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F d) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.

5) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.
V F b) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.
V F c) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.
- 6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.
- V F** a) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .
V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.
V F c) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
V F d) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .

7) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.
V F c) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
V F d) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim {}^\perp \mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.
V F b) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.
V F c) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
V F b) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.
V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.
V F d) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim {}^\perp\mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
V F b) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.
V F d) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V} è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
V F b) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.
V F c) Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
V F d) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.
V F b) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.
V F c) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
V F d) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .

5) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.
V F c) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.
V F d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
V F b) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.
V F c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.
V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .
V F c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.
V F d) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.
V F b) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

9) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .
V F b) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F c) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
V F b) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .
V F c) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .
V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.
V F b) Non esistono campi con infiniti elementi.
V F c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.
V F d) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
V F b) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .
V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.
V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.
V F b) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.
V F d) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.
V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .
V F d) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.
V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
V F d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.

7) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.
V F b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .
V F c) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .
V F d) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .

8) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
V F b) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.
V F c) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.
V F d) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.
V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
V F c) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.
V F d) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp\mathbf{U}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
- V F** b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.
- V F** c) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

2) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
- V F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .
- V F** c) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- V F** d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
- V F** b) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.
- V F** c) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp\mathbf{U}$.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** c) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.
- V F** d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.
V F c) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.
V F d) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .

6) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .
V F b) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .
V F c) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .
V F d) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.
V F b) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.
V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).
V F d) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .
V F b) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.
V F c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F d) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.
V F b) Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
V F c) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
V F d) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V} è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.
V F d) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.
V F b) Non esistono campi con infiniti elementi.
V F c) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.
V F d) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .
V F b) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.
V F c) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .
V F d) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

4) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
V F b) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.
V F c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.
V F d) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

5) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.
V F b) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
V F c) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.
V F d) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .
- V F** b) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
- V F** c) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.
- V F** d) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
- V F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.
- V F** c) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.
- V F** d) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim \perp \mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
- V F** b) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.
- V F** c) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.
- V F** b) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
- V F** c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.
- V F** d) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .
V F c) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
V F b) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.
V F c) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.
V F d) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .

3) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.
V F b) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.
V F c) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F d) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.
V F b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.
V F c) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.
V F d) Non esistono campi con infiniti elementi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.
V F b) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.
V F c) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = \dim \mathbf{U} - 1$.
V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .
- V F** b) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
- V F** d) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.
- V F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
- V F** c) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.
- V F** d) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .
- V F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .
- V F** c) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** d) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
- V F** b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.
- V F** c) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
- V F** d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
V F b) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.
V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).
V F c) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.
V F d) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
V F b) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .
V F c) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .
V F d) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale **V** è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
V F b) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
V F c) Se **U** e **W** sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
V F d) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.
- V F** b) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.
- V F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \|$.
- V F** d) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp \mathbf{U}$.

6) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .
- V F** b) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.
- V F** c) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .
- V F** d) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
- V F** b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.
- V F** c) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .
- V F** d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.
- V F** c) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.
- V F** d) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.

9) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
- V F** b) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.
- V F** c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.
- V F** d) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se 0 è un autovalore di T , allora T non è invertibile.
V F b) Se la matrice canonicamente associata a T è simmetrica, allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è uguale a n .
V F c) $S \circ T$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^n .
V F d) Se \mathcal{B} è una base spettrale per T , allora ogni elemento di \mathcal{B} è un autovettore di T .

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme dei polinomi che si possono scrivere nella forma $ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
V F b) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione n contiene almeno $n + 1$ vettori, allora è linearmente dipendente.
V F c) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali non è finitamente generato.
V F d) Ogni spazio vettoriale è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto per uno scalare.

3) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) T è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F b) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è iniettiva.
V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di \mathbf{V} , allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di \mathbf{W} .
V F d) Se T è invertibile, allora è un isomorfismo.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di \mathbb{R}^3 in un numero reale.
V F b) Se due rette di \mathbb{R}^3 hanno gli stessi numeri direttori allora sono fra loro ortogonali.
V F c) In \mathbb{R}^3 esistono infinite rette sghembe rispetto a una retta data.
V F d) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 0$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $m \times n$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.
V F b) Il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili è un sottogruppo del gruppo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, rispetto alla somma indotta.
V F c) Non esistono campi con infiniti elementi.
V F d) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello ma non è un campo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'unica matrice reale $n \times n$ con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.
V F b) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \cdot \det B \neq 0$, allora A e B hanno lo stesso rango.
V F c) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.
V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F b) Ogni sistema finito di generatori per \mathbb{R}^n è contenuto in almeno una base di \mathbb{R}^n .
V F c) Due spazi vettoriali finitamente generati sono non isomorfi se e solo se hanno dimensioni fra loro diverse.
V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^3 , allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale.
V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
V F c) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che ogni vettore di \mathbf{U} è ortogonale a ogni vettore di ${}^\perp\mathbf{U}$.
V F d) Le coordinate rispetto a una base ortonormale sono indipendenti dalla base ortonormale scelta.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite sono possibili.
V F b) Tutti i sistemi lineari contengono equazioni linearmente dipendenti.
V F c) Ogni sistema lineare reale la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette una e una sola soluzione.
V F d) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione parametrica rispetto a \mathcal{B} .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.

1) Siano S e T due endomorfismi di \mathbb{R}^n . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se T è invertibile e diagonalizzabile e $S = T^{-1}$, allora S è invertibile e diagonalizzabile.
V F b) Se S e T hanno una base spettrale in comune, hanno lo stesso polinomio caratteristico.
V F c) Ogni radice del polinomio caratteristico di T è un autovalore di T se e solo se la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica coincidono.
V F d) T è diagonalizzabile se e solo se ammette almeno un autovalore reale positivo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti uguali.
V F b) Se $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ allora $\det(3A) = 81 \det A$.
V F c) Tutte le matrici triangolari sono invertibili.
V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1 .

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n che hanno in comune il solo vettore nullo, allora $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.
V F b) La chiusura lineare di un insieme di tre vettori distinti non nulli di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V} è uno spazio vettoriale reale di dimensione 3.
V F c) L'insieme delle matrici reali 2×3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.
V F d) Lo spazio vettoriale reale standard \mathbb{R} contiene esattamente due sottospazi vettoriali reali.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

- V F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$.
V F b) Per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbb{R}^n si ha che $\dim {}^\perp \mathbf{U} = \dim \mathbf{U} - 1$.
V F c) Il determinante di ogni matrice associata all'endomorfismo di \mathbb{R}^9 che manda ogni vettore nel suo opposto è negativo.
V F d) \mathbb{R}^3 ammette infinite basi ortonormali diverse fra loro.

5) Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se $\dim \mathbf{V} < \dim \mathbf{W}$, allora T non può essere suriettiva.
V F b) Se A è una matrice associata a T e T è un isomorfismo, allora A è invertibile.
V F c) Ogni trasformazione lineare $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diversa da quella identicamente nulla è biiettiva.
V F d) Se A è una matrice associata a T e $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, allora A è quadrata.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n ammettono la stessa base, allora coincidono.
V F b) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali triangolari alte 2×2 è 3.
V F c) Il vettore nullo di \mathbb{R}^n ammette sempre infinite n -uple di coordinate rispetto a qualunque base di \mathbb{R}^n .
V F d) Dati due vettori qualunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di \mathbb{R}^3 esiste sempre almeno un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base di \mathbb{R}^3 .

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Se \mathbf{x} è soluzione di un sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 , allora anche $7\mathbf{x}$ è soluzione di \mathbf{S}_0 .
V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa è uguale al rango della sua matrice incompleta.
V F c) Sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbb{R}^n . \mathbf{U} ammette almeno una rappresentazione cartesiana rispetto a \mathcal{B} .
V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni linearmente indipendenti in 8 incognite è 3.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su \mathbb{R}^3 la struttura di spazio euclideo standard).

- V F** a) Il prodotto vettoriale del vettore $(1, 0, 0)$ col vettore $(0, 1, 0)$ è il vettore nullo.
V F b) La relazione di ortogonalità fra rette di \mathbb{R}^3 è una relazione di equivalenza.
V F c) I piani di \mathbb{R}^3 rispettivamente di equazione $x = 0$ e $z = 0$ sono fra loro paralleli.
V F d) Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva il coseno dell'angolo fra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- V F** a) Tutti i gruppi finiti sono commutativi.
V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 2 e l'anello $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 4 sono fra loro isomorfi.
V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 7 è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).
V F d) Non esistono gruppi con esattamente quattro elementi.