3 Settembre 2018 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F c) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

V F d) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

V F b) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F b) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F d) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

V F b) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Non esistono spazi vettoriali finiti.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V **F** b) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V **F** c) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V **F** d) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** b) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V **F** c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V **F** d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

V **F** b) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

V **F** d) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V **F** b) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V **F** c) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^{\perp} = n - \dim \mathbf{U}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

V **F** b) Esistono isometrie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x - y - z = 0$ e $2x - 2y - 2z = 1$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) $(1,0,1) \wedge (0,1,0) = (0,0,0)$.

V F b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x - y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

V F c) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

V F b) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \neq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F b) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F b) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$ è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F c) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n + 1$.

V F b) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

V F b) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

V F c) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V **F** b) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

V **F** c) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V **F** d) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

V **F** b) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V **F** c) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V **F** b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V **F** c) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V **F** d) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V **F** b) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V **F** c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

V **F** d) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V **F** c) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono spazi vettoriali finiti.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V F d) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

7) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\geq\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$.

V F b) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=-\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x+2y+3z=0$ e $3x-y=0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) $(1,0,1)\wedge(0,1,0)=(0,0,0)$.

V F d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F d) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) Esistono isometrie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x - y - z = 0$ e $2x - 2y - 2z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V F c) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x+y, y+z, x+z)$ è una trasformazione lineare.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

V F b) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n\times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

V F d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V F b) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n - \dim \mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

6) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

V F c) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

V F d) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

V F b) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

V F c) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n + 1$.

V F d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

V F b) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \neq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F c) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

V F d) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

3 Settembre 2018 N. di Matricola: 01001

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

V **F** b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V **F** c) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

V **F** d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

V **F** b) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n+1$.

V **F** c) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

V **F** d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

3) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V **F** b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n - \dim \mathbf{U}$.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.

V **F** d) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

V **F** c) Non esistono spazi vettoriali finiti.

V **F** d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V **F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V **F** c) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

V **F** d) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V **F** b) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V **F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

V **F** c) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

V **F** d) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) Esistono isometrie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x - y - z = 0$ e $2x - 2y - 2z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V **F** c) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F b) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F c) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

V F b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

V F c) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F b) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

5) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = -\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x+2y+3z=0$ e $3x-y=0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F d) $(1,0,1)\wedge(0,1,0)=(0,0,0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

V F b) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) \neq \dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim\mathbf{U}\leq\dim\mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}\subseteq\mathbf{W}$.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) = \dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F d) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita come $f(x,y,z)=(x+y,y+z,x+z)$ è una trasformazione lineare.

V F c) La funzione $f: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita come $f(x,y,z)=(xy,yz,xz)$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

V F d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

V F d) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n + 1$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

V F d) Non esistono spazi vettoriali finiti.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V F b) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F d) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) $(1,0,1) \wedge (0,1,0) = (0,0,0)$.

V F c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x - y = 0$ sono fra loro ortogonali.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F c) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

V F c) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

V F d) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

V F d) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

2) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

V **F** b) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n - \dim \mathbf{U}$.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V **F** b) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V **F** c) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

V **F** d) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Esistono isometrie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V **F** c) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x - y - z = 0$ e $2x - 2y - 2z = 1$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F b) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V F c) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

V F b) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V F c) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \neq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

V F d) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

9) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

V F b) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

V F d) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V **F** b) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

2) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.

V **F** c) Per $n\geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n-\dim\mathbf{U}$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) Esistono isometrie $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V **F** b) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x+y+z=0$ e $2x+2y+2z=1$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x-y-z=0$ e $2x-2y-2z=1$ sono fra loro ortogonali.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Non esistono spazi vettoriali finiti.

V **F** b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** c) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

V **F** d) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

5) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

V F b) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F d) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F c) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F d) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

V F c) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

V F d) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F b) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

V F c) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

V F d) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = -\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F b) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

V F d) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F c) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

V F d) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n\times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F c) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

V F d) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n+1$.

V F c) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n\times n$ ha dimensione n^2.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

V F b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x+y, y+z, x+z)$ è una trasformazione lineare.

V F c) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

V F b) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \neq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x - y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F c) $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

V F d) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Non esistono spazi vettoriali finiti.

V F b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F b) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F b) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F c) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

4) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F c) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V F d) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x - y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F d) $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

V F b) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

V F c) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V F d) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F c) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

V **F** b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V **F** d) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

V **F** b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V **F** c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

V **F** c) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

V **F** d) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n+1$.

V **F** d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

V **F** b) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V **F** d) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

6) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n - \dim \mathbf{U}$.

V **F** d) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V **F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

V **F** d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \neq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) Esistono isometrie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V **F** b) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x - y - z = 0$ e $2x - 2y - 2z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n+1$.

V F b) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

V F c) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

V F d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F b) Non esistono spazi vettoriali finiti.

V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V F d) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F b) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

V F c) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F c) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V F d) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F b) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

V F c) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

6) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

V F b) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n - \dim \mathbf{U}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x+y+z=0$ e $2x+2y+2z=1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Esistono isometrie $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V F c) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

V F d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x-y-z=0$ e $2x-2y-2z=1$ sono fra loro ortogonali.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

V F b) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

V F d) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F b) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

V F c) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = -\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F b) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

V F d) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F c) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V F d) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

V F b) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

V F c) L'anello $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim\mathbf{U}\leq\dim\mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}\subseteq\mathbf{W}$.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})\neq\dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F c) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

V F d) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** b) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

V **F** c) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V **F** b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x - y = 0$ sono fra loro ortogonali.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V **F** c) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$ è una trasformazione lineare.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

V **F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

V **F** d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V **F** b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** c) Non esistono spazi vettoriali finiti.

V **F** d) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V **F** b) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V **F** c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

V **F** d) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V **F** b) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V **F** c) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x - y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F c) $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

V F d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F d) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

V F b) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

V F b) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n + 1$.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

V F b) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V F c) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F b) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V F c) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V **F** c) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$ è una trasformazione lineare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

V **F** b) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \neq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

V **F** b) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

V **F** c) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** d) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x - y - z = 0$ e $2x - 2y - 2z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) Esistono isometrie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V **F** d) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n - \dim \mathbf{U}$.

V **F** b) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

V **F** c) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V **F** d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V **F** b) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

V **F** c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n - \dim \mathbf{U}$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) Esistono isometrie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x - y - z = 0$ e $2x - 2y - 2z = 1$ sono fra loro ortogonali.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V **F** b) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

V **F** c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V **F** c) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V **F** d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

5) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

V **F** c) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

V **F** d) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F b) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

V F c) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V F b) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

V F d) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F c) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V F d) Non esistono spazi vettoriali finiti.

9) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F b) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F c) $\dim(\text{Ker } T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V F d) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) \neq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F b) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

V F d) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n\times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F b) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F c) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F b) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x - y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F d) $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n+1$.

V F b) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F b) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

V F c) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

V F b) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F c) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x+y, y+z, x+z)$ è una trasformazione lineare.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

9) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

V **F** c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** d) Non esistono spazi vettoriali finiti.

2) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) $\dim(\operatorname{Ker} T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V **F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V **F** c) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V **F** d) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

3) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V **F** c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V **F** b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x - y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

V **F** d) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V **F** b) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V **F** d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V **F** b) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V **F** c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

V **F** d) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

V **F** b) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

V **F** c) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V **F** d) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

V **F** c) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

V **F** d) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V **F** d) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V **F** b) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

V **F** c) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

V **F** d) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

V **F** c) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n\times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

V **F** c) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

V **F** d) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n + 1$.

4) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

V **F** c) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

V **F** d) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V **F** c) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x+y, y+z, x+z)$ è una trasformazione lineare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

V **F** b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \neq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V **F** c) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

7) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V **F** b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

V **F** c) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

V **F** d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n - \dim \mathbf{U}$.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) Esistono isometrie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V **F** b) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

V **F** c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x - y - z = 0$ e $2x - 2y - 2z = 1$ sono fra loro ortogonali.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

V **F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

V **F** d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V F c) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V F d) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V F b) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

V F c) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

V F d) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F d) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

V F b) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n - \dim \mathbf{U}$.

V F d) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) Esistono isometrie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x - y - z = 0$ e $2x - 2y - 2z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

V F b) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F d) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

8) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n + 1$.

V F d) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V F b) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V F d) Non esistono spazi vettoriali finiti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V F b) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

V F d) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F c) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

V F d) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \neq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F b) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

V F c) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

V F d) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

4) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V F b) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V F c) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V F d) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

5) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

V F c) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

V F b) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

V F c) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

V F c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F d) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x - y = 0$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V F d) $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x+y, y+z, x+z)$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore di una matrice reale simmetrica coincidono.

V **F** b) Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile.

V **F** c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di polinomio caratteristico.

V **F** d) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base spettrale.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ crescenti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.

V **F** b) Se un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione n contiene meno di n vettori, allora non può essere una base per $\mathbf{V}$.

V **F** c) Lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a 8 non è finitamente generato.

V **F** d) Non esistono spazi vettoriali finiti.

3) Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali reali finitamente generati e sia $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se T è iniettiva e suriettiva allora $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

V **F** b) $\dim(\mathrm{Ker}\ T) = 0$ se e solo se T è suriettiva.

V **F** c) Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$ e T è un isomorfismo, allora $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $\mathbf{W}$.

V **F** d) $\dim \mathbf{V} \geq \dim(T(\mathbf{V}))$.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V **F** a) Il prodotto vettoriale trasforma ogni coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ in un vettore di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

V **F** c) $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

V **F** d) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e $3x - y = 0$ sono fra loro ortogonali.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è un gruppo commutativo rispetto all'usuale somma.

V F b) Il campo dei numeri razionali e il campo dei numeri reali sono fra loro isomorfi.

V F c) Tutti i gruppi con due elementi sono fra loro isomorfi.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Due matrici fra loro simili hanno sempre lo stesso determinante.

V F b) Ogni matrice identica ha determinante uguale a 1.

V F c) Se una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora anche $2A$ ha determinante nullo.

V F d) Una matrice quadrata reale è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

7) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) $\mathbb{R}^n$ non ammette sottospazi vettoriali di dimensione $n+1$.

V F b) Tutti i sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa cardinalità.

V F c) Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ ha dimensione n^2.

V F d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ contiene una base di $\mathbb{R}^n$.

8) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V F a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

V F b) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che ogni vettore di $\mathbf{U}^\perp$ è ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La relazione di ortogonalità fra vettori di $\mathbb{R}^n$ è una relazione di equivalenza.

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F b) Ogni sistema lineare reale di 7 equazioni in 5 incognite ammette infinite soluzioni.

V F c) Ogni sistema lineare reale di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione cartesiana rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora coincidono.

V **F** b) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso rango.

V **F** c) Se A ammette 1 come autovalore di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identica.

V **F** d) Se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

2) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono una la trasposta dell'altra, hanno determinanti di segno opposto.

V **F** b) Il prodotto di due matrici reali non invertibili 3×3 è una matrice reale non invertibile.

V **F** c) Tutte le matrici reali 5×5 sono invertibili.

V **F** d) Ogni matrice ortogonale ha determinante positivo.

3) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V **F** a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$.

V **F** b) La chiusura lineare di un insieme di 4 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

V **F** d) Due spazi vettoriali reali che abbiano entrambi dimensione 7 sono sempre fra loro isomorfi.

4) Siano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ la norma da esso indotta.

V **F** a) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

V **F** b) Per ogni sottospazio vettoriale $\mathbf{U}$ di $\mathbb{R}^n$ si ha che $\dim \mathbf{U}^\perp = n - \dim \mathbf{U}$.

V **F** c) Per $n \geq 2$ l'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ è infinito.

V **F** d) Ogni base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ può essere completata a una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2n}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella matrice nulla è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (x+y, y+z, x+z)$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ è una trasformazione lineare.

6) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) \neq \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F b) La funzione che associa a ogni spazio vettoriale la sua dimensione è una trasformazione lineare.

V F c) Esistono spazi vettoriali che contengono due vettori nulli fra loro distinti.

V F d) Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ e $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Un sistema lineare reale è possibile se e solo se il rango della sua matrice completa C è uguale al rango di ogni sottomatrice di C.

V F c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ ammettono almeno una rappresentazione parametrica rispetto al riferimento cartesiano ortogonale standard.

V F d) La dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 7 incognite non può mai essere 2.

8) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (si consideri su $\mathbb{R}^3$ la struttura di spazio vettoriale euclideo standard).

V F a) Il prodotto vettoriale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ per se stesso è sempre il vettore nullo.

V F b) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x - y - z = 0$ e $2x - 2y - 2z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) I piani di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente di equazione $x + y + z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Esistono isometrie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverse dall'identità.

9) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

V F a) Tutti i gruppi commutativi hanno un numero finito di elementi.

V F b) L'anello $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ delle classi di resto modulo 3 è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo (rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto).

V F d) Se due gruppi hanno lo stesso numero di elementi allora sono isomorfi.