

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.
- V F** b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- V F** c) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- V F** d) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.
- V F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
- V F** c) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .
- V F** b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
- V F** c) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^tA{}^tB = {}^t(AB)$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.
- V F** b) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
- V F** c) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.
- V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.
V F b) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
V F d) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.
V F b) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
V F c) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .
V F d) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.
V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
V F c) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.
V F d) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
V F b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
V F c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
V F d) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.
V F b) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.
V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.
- V F** b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .
- V F** c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
- V F** d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.
- V F** b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.
- V F** c) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** d) Il prodotto vettoriale è commutativo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.
- V F** c) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
- V F** d) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.
- V F** b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.
- V F** c) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .
V F b) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.
V F c) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.
V F d) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.
V F b) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.
V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .
V F b) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.
V F c) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.
V F b) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.
V F c) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.
V F d) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.
V F b) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.
V F c) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.
V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.
- V F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
- V F** d) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.
- V F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
- V F** c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
- V F** d) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .
- V F** b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .
- V F** c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
- V F** d) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.
- V F** b) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.
- V F** d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^tA{}^tB = {}^t(AB)$.
V F b) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .
V F c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
V F d) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F b) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.
V F c) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
V F d) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.
V F b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
V F c) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.
V F d) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{w} \|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Il prodotto vettoriale è commutativo.
V F b) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.
V F c) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.
V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.
V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.
V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
V F d) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.
V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.
V F d) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
V F b) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F c) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.
V F d) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F b) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.
V F c) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.
V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.
V F b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .
V F d) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
- V F** b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
- V F** c) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .
- V F** d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** b) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.
- V F** c) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.
- V F** b) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.
- V F** c) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.
- V F** d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.
- V F** c) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .
- V F** d) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .
- V F** b) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
- V F** c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.
- V F** d) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .
- V F** c) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.
- V F** d) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.
- V F** b) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.
- V F** c) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.
- V F** d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
- V F** b) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .
- V F** c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** d) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
- V F** b) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.
- V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** d) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
V F b) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.
V F c) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.
V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
V F b) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.
V F c) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .
V F d) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
V F b) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.
V F c) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.
V F d) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
V F b) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.
V F c) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.
V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F b) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.
V F c) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.
V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.
- V F** c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .
- V F** b) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.
- V F** c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
- V F** d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
- V F** b) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.
- V F** d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- V F** b) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- V F** c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.
- V F** d) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
- V F** b) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.
- V F** d) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Il prodotto vettoriale è commutativo.
- V F** c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.
- V F** d) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.
- V F** b) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.
- V F** c) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
- V F** b) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.
- V F** c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .
- V F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^tA{}^tB = {}^t(AB)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.
- V F** b) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .
- V F** c) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.
- V F** b) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.
- V F** c) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.
- V F** b) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.
- V F** d) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
- V F** b) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.
- V F** c) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.
- V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
- V F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
- V F** c) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.
- V F** d) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Il prodotto vettoriale è commutativo.
V F b) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.
V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.
V F d) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.
V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
V F b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .
V F c) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.
V F d) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.
V F b) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.
V F c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.
V F d) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.
V F b) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.
V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.
V F d) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .
- V F** b) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
- V F** d) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
- V F** b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
- V F** c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** d) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.
- V F** b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- V F** c) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.
- V F** d) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
- V F** c) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.
- V F** d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .
V F b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^tA{}^tB = {}^t(AB)$.
V F d) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.
V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
V F c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F d) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.
V F b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
V F c) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.
V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.
V F b) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
V F c) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .
V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.
V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
V F c) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.
V F d) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^tA{}^tB = {}^t(AB)$.
- V F** c) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.
- V F** d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
- V F** b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
- V F** d) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
- V F** b) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.
- V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** b) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.
- V F** c) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.
- V F** d) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.
V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
V F c) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.
V F d) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .
V F b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .
V F c) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.
V F d) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.
V F c) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.
V F d) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
V F b) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.
V F c) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
V F b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
- V F** b) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{w} \|$.
- V F** c) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.
- V F** d) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.
- V F** b) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.
- V F** d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.
- V F** b) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .
- V F** c) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.
- V F** d) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.
- V F** c) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.
- V F** d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.
- V F** b) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.
- V F** c) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .
- V F** b) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.
- V F** c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
- V F** d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.
- V F** b) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .
- V F** c) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.
- V F** b) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.
- V F** c) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.
- V F** c) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.
- V F** d) Il prodotto vettoriale è commutativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** b) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.
- V F** c) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
- V F** d) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .
- V F** b) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.
- V F** c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
- V F** d) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.
- V F** b) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.
- V F** c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.
- V F** b) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.
- V F** c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
- V F** d) La funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.
- V F** b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
- V F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.
- V F** d) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Il prodotto vettoriale è commutativo.
- V F** b) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.
- V F** d) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.
- V F** b) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- V F** c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- V F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t A {}^t B = {}^t (AB)$.
- V F** b) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.
- V F** c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
- V F** d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.
- V F** b) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.
- V F** c) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .
- V F** d) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .
- V F** b) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.
- V F** c) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.
- V F** d) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** b) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.
- V F** c) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.
- V F** d) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.
- V F** b) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.
- V F** c) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.
- V F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.
- V F** d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
- V F** b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** c) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .
- V F** d) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.
- V F** b) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .
- V F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
- V F** d) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.
- V F** b) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.
- V F** c) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .
- V F** d) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
- V F** b) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.
- V F** c) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.
- V F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.
V F b) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.
V F c) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.
V F d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.
V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F c) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
V F d) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
V F b) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.
V F c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
V F d) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .
V F b) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .
V F c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
V F d) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .
- V F** b) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.
- V F** d) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
- V F** b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
- V F** c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** d) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** b) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
- V F** c) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.
- V F** d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** c) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.
- V F** d) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.
- V F** b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** c) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.
- V F** d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.
- V F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.
- V F** c) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.
- V F** d) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.
- V F** b) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.
- V F** d) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- V F** b) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.
- V F** c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- V F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .
V F b) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.
V F d) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.
V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^tA{}^tB = {}^t(AB)$.
V F c) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
V F d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Il prodotto vettoriale è commutativo.
V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.
V F c) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.
V F d) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
V F b) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F c) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.
V F d) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.
V F b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .
V F d) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
- V F** b) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.
- V F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** d) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.
- V F** b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.
- V F** d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
- V F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
- V F** c) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.
- V F** d) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
- V F** b) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.
- V F** d) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{w} \|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Il prodotto vettoriale è commutativo.
- V F** c) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.
- V F** d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
- V F** b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .
- V F** c) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .
- V F** d) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** b) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.
- V F** c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .
- V F** c) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.
- V F** d) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.
- V F** b) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.
- V F** c) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.
- V F** d) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.
V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.
V F d) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.
V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .
V F c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
V F d) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t A {}^t B = {}^t (AB)$.
V F b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .
V F d) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.
V F d) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
- V F** b) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.
- V F** c) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** d) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .
- V F** b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.
- V F** c) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
- V F** d) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.
- V F** b) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.
- V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
- V F** d) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .
- V F** b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
- V F** c) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
- V F** d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
- V F** b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
- V F** c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** d) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
- V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** c) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.
- V F** d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
- V F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t A {}^t B = {}^t (AB)$.
- V F** c) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.
- V F** d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.
- V F** b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .
- V F** c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
- V F** d) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
- V F** b) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.
- V F** c) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.
- V F** d) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- V F** b) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.
- V F** c) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- V F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
- V F** b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** c) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.
- V F** b) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.
- V F** c) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
- V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.
- V F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
- V F** c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
- V F** d) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
V F b) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.
V F c) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .
V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.
V F b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F d) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
V F b) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.
V F c) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.
V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.
V F b) Il prodotto vettoriale è commutativo.
V F c) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.
V F d) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.
V F b) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.
V F c) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.
V F d) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .
V F b) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.
V F d) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.
V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.
V F c) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.
V F d) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F b) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .
V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
V F d) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.
V F b) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.
V F c) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
V F d) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
- V F** b) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.
- V F** c) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.
- V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
- V F** b) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.
- V F** c) La funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
- V F** d) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.
- V F** b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
- V F** c) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.
- V F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Il prodotto vettoriale è commutativo.
- V F** b) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** c) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.
- V F** d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
- V F** b) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.
- V F** c) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .
- V F** d) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.
- V F** b) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.
- V F** c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.
- V F** d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.
- V F** b) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- V F** c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.
- V F** d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** b) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.
- V F** d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^tA{}^tB = {}^t(AB)$.
- V F** b) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.
- V F** c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .
- V F** d) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.
V F b) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
V F c) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.
V F d) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F b) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F c) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.
V F d) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.
V F b) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.
V F c) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.
V F d) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.
V F c) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.
V F d) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
- V F** b) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** c) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.
- V F** d) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .
- V F** b) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
- V F** c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.
- V F** d) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
- V F** b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
- V F** c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
- V F** d) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
- V F** b) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.
- V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.
- V F** b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
- V F** c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .
- V F** d) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
V F b) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.
V F c) La funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
V F d) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
V F b) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.
V F c) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .
V F d) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
V F b) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.
V F c) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.
V F d) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.
V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
V F c) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.
V F d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .
- V F** b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
- V F** c) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .
- V F** d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.
- V F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** c) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.
- V F** d) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.
- V F** b) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.
- V F** c) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .
- V F** d) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.
- V F** b) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.
- V F** c) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.
- V F** d) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
- V F** b) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.
- V F** c) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.
- V F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.
V F c) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.
V F c) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F d) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
V F b) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .
V F c) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.
V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
V F b) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .
V F c) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^t A {}^t B = {}^t (AB)$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
- V F** b) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{w} \|$.
- V F** c) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.
- V F** d) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.
- V F** b) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.
- V F** c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.
- V F** d) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
- V F** b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.
- V F** c) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.
- V F** d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.
- V F** b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.
- V F** c) Il prodotto vettoriale è commutativo.
- V F** d) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
- V F** c) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .
- V F** d) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette sempre almeno un autovalore reale.
V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso determinante.
V F c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.
V F d) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità geometrica.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La matrice prodotto di due matrici reali 7×7 di rango 7 ha sempre rango 7.
V F b) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente dipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente dipendenti.
V F c) Esistono sistemi lineari di 4 equazioni in 9 incognite privi di soluzioni.
V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
V F b) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di \mathbb{R}^5 non possono mai coincidere.
V F c) Esistono trasformazioni lineari iniettive $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$ la cui immagine ha dimensione 4.
V F d) Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale porta il vettore nullo nel vettore nullo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.
V F b) Il prodotto vettoriale è commutativo.
V F c) Esistono piani di \mathbb{R}^3 la cui equazione cartesiana non ammette soluzioni.
V F d) Il piano di equazione cartesiana $y = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 3, z = 0$ sono fra loro paralleli.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_3, +)$.
- V F** b) L'insieme degli interi multipli di 5 è un sottogruppo del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ rispetto all'operazione indotta.
- V F** c) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
- V F** d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^7 di cardinalità 7 è una base di \mathbb{R}^7 .
- V F** b) Siano B_1 e B_2 basi rispettive di due spazi vettoriali reali finitamente generati V e W . Se B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità allora V e W sono fra loro isomorfi.
- V F** c) Le funzioni $\sin kx$ per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} , dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- V F** d) Esistono spazi vettoriali privi di vettore nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) La somma fra matrici reali $n \times n$ è commutativa.
- V F** b) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = ij$ ha determinante nullo.
- V F** c) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.
- V F** d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora anche la sua inversa ha determinante uguale a 1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.
- V F** b) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo rispetto all'usuale composizione.
- V F** c) Lo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^7 non ammette prodotti scalari.
- V F** d) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 3 gli elementi dell'ultima riga si ottiene una matrice il cui determinante è il triplo del determinante di A .
- V F** b) Se da una matrice quadrata reale A di ordine pari $n \geq 2$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = -\det B$.
- V F** c) Ogni matrice reale 5×5 contenente almeno 21 elementi nulli ha determinante nullo.
- V F** d) Ogni matrice identica di ordine dispari ha determinante uguale a -1 .

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k , m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su \mathbb{R}^n e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili hanno la stessa traccia.
V F b) Esistono matrici quadrate reali dotate di autovalori di molteplicità geometrica nulla.
V F c) Se una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile allora ha n autovalori reali distinti.
V F d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'intersezione di tre sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbb{R}^n è un sistema di generatori di \mathbb{R}^n .
V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.
V F d) L'insieme delle funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Esistono matrici reali $n \times n$ triangolari che non sono invertibili.
V F b) La matrice prodotto di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.
V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha rango n .
V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora ${}^tA{}^tB = {}^t(AB)$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
V F b) Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^8 non esistono vettori ortogonali a tutti i vettori di \mathbb{R}^8 .
V F c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^5 di equazione cartesiana $x_4 = 0, x_5 = 0$. Allora W^\perp ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
V F d) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V . Allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se \mathbf{v} è il vettore nullo di V .

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) L'intersezione fra l'immagine e il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^n è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .
- V F** b) La funzione da $M_5(\mathbb{R})$ a $M_5(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 5×5 nella sua opposta è una trasformazione lineare.
- V F** c) Esiste un'unica trasformazione lineare da \mathbb{R} a \mathbb{R} che porta 1 in -1 .
- V F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Una matrice quadrata reale A invertibile ha sempre lo stesso rango di A^{-1} .
- V F** b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(A) = r(C)$.
- V F** c) Le operazioni riga conservano il rango delle matrici reali.
- V F** d) Se due matrici reali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n .

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1.
- V F** b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij} .
- V F** c) Ogni matrice reale diagonale i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.
- V F** d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $\det(AB^{-1}) = \det A / \det B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 :

- V F** a) $(1, 2, 3) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.
- V F** b) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a un piano dato.
- V F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y + 5z = 0$ e $-2x - 3y - 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.
- V F** d) Esiste una e una sola retta che ammette $(0, 0, 0)$ come terna di parametri direttori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- V F** a) Ogni funzione da un insieme finito a un altro insieme finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- V F** b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione \star definita ponendo $x \star y = \max(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- V F** c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.
- V F** d) Tutti i campi con esattamente due elementi sono fra loro isomorfi.