11 Febbraio 2019 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

V F b) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F c) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

V F d) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

V F b) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V F c) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F b) Il prodotto di una matrice reale $n \times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n \times n$ non può mai essere una matrice $n \times n$ invertibile.

V F c) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h \times k$ per una matrice reale $k \times h$ è una matrice reale $k \times k$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F b) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V F c) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

V F b) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

V F b) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F c) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

V F d) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

V F b) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

V F d) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, -y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

V F c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$.

V F b) Esiste una e una sola retta che ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

V F b) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V F d) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

V F b) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F d) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

V F c) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

V F c) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F d) Se due matrici reali diagonali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

V **F** b) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

V **F** c) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V **F** d) Le funzioni x^k per $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

V **F** b) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

V **F** c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1,0)$ in $(1,1,1)$ e $(0,1)$ in $(2,2,2)$.

V **F** b) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x,y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

V **F** b) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

V **F** c) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V **F** c) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

V **F** d) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

V F c) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V F d) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V F d) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

V F b) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

V F c) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F d) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

V F b) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F c) Il prodotto di una matrice reale $n \times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n \times n$ non può mai essere una matrice $n \times n$ invertibile.

V F d) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h \times k$ per una matrice reale $k \times h$ è una matrice reale $k \times k$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

V F c) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

V F b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V F d) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

V F d) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

V F b) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

V F c) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F d) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esiste una e una sola retta che ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F d) $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

V F b) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

V F d) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1, 0)$ in $(1, 1, 1)$ e $(0, 1)$ in $(2, 2, 2)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

V F b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V F c) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle$ per ogni $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u}=\mathbf{w}$.

V F b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z) = (z,-y,x)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F b) Se una matrice reale $n\times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

V F c) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

V F d) Se due matrici reali $n\times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$, allora $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

V F b) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

V F c) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

V F d) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le funzioni x^k per $k\in\mathbb{N}-\{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

V F b) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F d) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali diagonali $n\times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

V F b) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

V F d) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le funzioni x^k per $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F c) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

V F d) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

V F b) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

V F c) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

V F d) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

V F b) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, -y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V F b) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

V F c) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F b) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

V F c) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

V F d) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F b) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

V F c) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esiste una e una sola retta che ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F c) $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

V F c) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

V F b) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

V F c) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

V F c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V F d) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V F b) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

V F c) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

V F d) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ si ha che $\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$.

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ risulta $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\geq\|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$.

V F d) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y=-5$ e $x+z=3$ sono fra loro paralleli.

V F b) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$.

V F c) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C)=r(A)+1$.

V F b) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

V F c) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F d) Se due matrici reali diagonali $n\times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di una matrice reale $n\times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n\times n$ non può mai essere una matrice $n\times n$ invertibile.

V F b) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h\times k$ per una matrice reale $k\times h$ è una matrice reale $k\times k$.

V F c) Una matrice reale $n\times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1}=(AB)^{-1}$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

V F b) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1,0)$ in $(1,1,1)$ e $(0,1)$ in $(2,2,2)$.

V F c) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x,y)=(\cos x,\sin y)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

V F b) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F c) Le funzioni x^k per $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

V F d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

V F b) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

V F d) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

V F b) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

V F c) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

V **F** b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V **F** b) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

V **F** c) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

V **F** d) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V **F** c) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V **F** d) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

V **F** d) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1,0)$ in $(1,1,1)$ e $(0,1)$ in $(2,2,2)$.

V **F** b) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x,y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

V **F** b) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

V **F** c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z) = (z, -y, x)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** d) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

V **F** b) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V **F** c) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

V **F** d) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Esiste una e una sola retta che ammette $(1,1,1)$ come terna di parametri direttori.

V **F** c) $(1,2,3) \wedge (2,4,6) = (0,0,0)$.

V **F** d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F b) Il prodotto di una matrice reale $n \times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n \times n$ non può mai essere una matrice $n \times n$ invertibile.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$.

V F d) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h \times k$ per una matrice reale $k \times h$ è una matrice reale $k \times k$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

V F b) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

V F b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V F c) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

V F d) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

V F b) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F c) Se due matrici reali diagonali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

V F b) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F c) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

V F d) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di una matrice reale $n \times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n \times n$ non può mai essere una matrice $n \times n$ invertibile.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$.

V F c) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h \times k$ per una matrice reale $k \times h$ è una matrice reale $k \times k$.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, -y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esiste una e una sola retta che ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F d) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

V F d) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

V F b) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

V F c) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

V F d) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F b) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

V F d) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

V F c) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

V F d) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ si ha che $\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ risulta $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\geq\|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$.

V F c) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V F d) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

V F b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F c) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F c) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

V F d) Le funzioni x^k per $k\in\mathbb{N}-\{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6,+)$.

V F c) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

V F b) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

V F c) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

V F c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V F d) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

V F b) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1, 0)$ in $(1, 1, 1)$ e $(0, 1)$ in $(2, 2, 2)$.

V F c) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

V F b) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

V F c) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F d) Se due matrici reali diagonali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F b) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

V F d) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F c) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V F d) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

V F b) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

V F c) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F d) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

V F b) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

V F c) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F d) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

V F b) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

V F c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V F d) La funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z)=(0,y,0)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

V F b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

V F d) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F c) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

V F b) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

V F c) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F d) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

V F c) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$.

V F b) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h \times k$ per una matrice reale $k \times h$ è una matrice reale $k \times k$.

V F c) Il prodotto di una matrice reale $n \times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n \times n$ non può mai essere una matrice $n \times n$ invertibile.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

V F b) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F d) Le funzioni x^k per $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

V F c) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

V F d) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F b) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

V F c) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

V F b) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

V F c) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, -y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

V F d) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

V F b) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1, 0)$ in $(1, 1, 1)$ e $(0, 1)$ in $(2, 2, 2)$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

V F d) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

V F b) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

V F c) Se due matrici reali diagonali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

V F d) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esiste una e una sola retta che ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

V **F** c) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

V **F** d) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

V **F** b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V **F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

V **F** c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V **F** d) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

V **F** b) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

V **F** c) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V **F** d) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Le funzioni x^k per $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

V F c) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

V F d) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

V F b) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, -y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Esiste una e una sola retta che ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

V F b) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F c) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

V F d) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ risulta $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \geq \|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V **F** d) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ si ha che $\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V **F** c) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V **F** d) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

V **F** b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V **F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4,+)$ è commutativo.

V **F** b) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

V **F** c) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali diagonali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

V F b) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

V F d) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h \times k$ per una matrice reale $k \times h$ è una matrice reale $k \times k$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$.

V F c) Il prodotto di una matrice reale $n \times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n \times n$ non può mai essere una matrice $n \times n$ invertibile.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

V F b) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

V F b) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

V F d) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1, 0)$ in $(1, 1, 1)$ e $(0, 1)$ in $(2, 2, 2)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

V F b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V F c) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

V F b) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

V F d) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$.

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

V F c) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta $\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F b) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

V F d) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F b) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

V F c) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

V F d) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le funzioni x^k per $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

V F b) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F c) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F d) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

V F b) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

V F c) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

V F d) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

V **F** b) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V **F** c) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

V **F** d) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

V **F** b) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V **F** d) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$.

V **F** b) Il prodotto di una matrice reale $n \times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n \times n$ non può mai essere una matrice $n \times n$ invertibile.

V **F** c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V **F** d) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h \times k$ per una matrice reale $k \times h$ è una matrice reale $k \times k$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V **F** c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

V **F** d) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

V F c) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1, 0)$ in $(1, 1, 1)$ e $(0, 1)$ in $(2, 2, 2)$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali diagonali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

V F c) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F d) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

V F c) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F d) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Esiste una e una sola retta che ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F d) $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

V F b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

V F c) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, -y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle$ per ogni $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u}=\mathbf{w}$.

V F b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1=0, x_5=0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2=0, x_3=0, x_4=0$.

V F c) L'endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z)=(z,-y,x)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esiste una e una sola retta che ammette $(1,1,1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x+3y-z=0$ e $x+y+5z=2$ sono fra loro ortogonali.

V F c) $(1,2,3)\wedge(2,4,6)=(0,0,0)$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di una matrice reale $n\times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n\times n$ non può mai essere una matrice $n\times n$ invertibile.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1}=(AB)^{-1}$.

V F c) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h\times k$ per una matrice reale $k\times h$ è una matrice reale $k\times k$.

V F d) Una matrice reale $n\times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

V F b) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

V F c) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F d) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

V F c) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

V F d) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

V F c) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

V F d) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

V F c) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F b) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

V F c) Se due matrici reali diagonali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V F b) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

V F c) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

V F d) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

V F b) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

V F c) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

V F d) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Le funzioni x^k per $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

V F c) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F d) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

V F c) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1,0)$ in $(1,1,1)$ e $(0,1)$ in $(2,2,2)$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x,y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

V F c) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

V F d) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F c) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V F b) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

V F b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

V F c) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

V F d) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F b) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

V F c) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

V F d) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

V F b) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

V F b) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

V F c) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

V F d) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

V F d) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$.

V F b) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h \times k$ per una matrice reale $k \times h$ è una matrice reale $k \times k$.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F d) Il prodotto di una matrice reale $n \times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n \times n$ non può mai essere una matrice $n \times n$ invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F b) Le funzioni x^k per $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

V F c) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

V F d) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

V F c) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

V F d) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F b) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

V F d) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

V F b) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

V F d) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1, 0)$ in $(1, 1, 1)$ e $(0, 1)$ in $(2, 2, 2)$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali diagonali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

V F b) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

V F d) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, -y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esiste una e una sola retta che ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

V F b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V F c) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V F b) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F b) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

V F c) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

V F d) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

V F c) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

V F d) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

V F b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, -y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esiste una e una sola retta che ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F d) $(1, 2, 3) \wedge (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

V F b) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

V F c) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F d) Le funzioni x^k per $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

V F b) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

V F c) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V F b) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F c) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

V F c) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

V F c) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

V F d) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F b) Se due matrici reali diagonali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

V F c) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di una matrice reale $n \times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n \times n$ non può mai essere una matrice $n \times n$ invertibile.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F c) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h \times k$ per una matrice reale $k \times h$ è una matrice reale $k \times k$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

V F c) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

V F d) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

V F b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F c) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V F b) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

V F c) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

V F d) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

V F b) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

V F c) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

V F c) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1, 0)$ in $(1, 1, 1)$ e $(0, 1)$ in $(2, 2, 2)$.

V F d) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso rango allora non possono essere simili.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre uguale alla sua molteplicità geometrica.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice prodotto di due matrici reali 3×3 di rango 1 ha sempre rango 1.

V F b) Ogni matrice reale completamente ridotta con k pivot ha rango k.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ non possono mai coincidere.

V F c) Esistono trasformazioni lineari prive di nucleo.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^8$ iniettivi è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ iniettivo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esistono rette che non sono fra loro né coincidenti, né incidenti, né parallele.

V F b) Il prodotto vettoriale $((\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ è nullo per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano ortogonale a una retta data.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -5$ e $x + z = 3$ sono fra loro paralleli.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$.

V F b) Non esistono gruppi con esattamente 42 elementi.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema di generatori di $\mathbb{R}^9$ di cardinalità 9 è una base di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Se V_1 e V_2 sono due sottospazi vettoriali di dimensione dispari di uno spazio vettoriale V di dimensione 11, allora V non può essere la somma diretta di V_1 e V_2.

V F c) Le funzioni x^k per $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sono fra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

V F d) Non esistono spazi vettoriali di dimensione infinita.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Date due matrici reali A e B, è sempre definito il prodotto righe per colonne di A per B.

V F b) La matrice 9×9 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i - j$ ha determinante nullo.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

V F d) Per ogni matrice A a coefficienti tutti positivi esiste almeno una matrice B tale che $A = B^2$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ risulta $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$.

V F b) Esistono spazi vettoriali euclidei V di dimensione positiva tali che non esiste alcuna isometria da V a V.

V F c) Esistono spazi vettoriali reali di dimensione positiva su cui si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V F d) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice reale 5×5 coincide sempre col determinante della sua trasposta.

V F b) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F c) Ogni matrice reale 5×5 in cui la prima riga coincide con la trasposta della prima colonna ha determinante nullo.

V F d) Non esistono matrici quadrate reali tali che tutte le loro potenze abbiano determinante negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo h, k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali $n \times n$ sono simili allora hanno la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango.

V F b) Esistono matrici quadrate reali i cui autovalori reali hanno tutti molteplicità geometrica strettamente maggiore di 1.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile.

V F d) Nessuna matrice quadrata reale ammette il polinomio λ^4 come polinomio caratteristico.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente solo il vettore nullo ammette una e una sola base.

V F b) Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno la stessa cardinalità.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali che non contengono monomi di grado 20 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, rispetto alle operazioni indotte.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che si annullano nel punto 3 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto righe per colonne di una matrice reale $h \times k$ per una matrice reale $k \times h$ è una matrice reale $k \times k$.

V F b) Il prodotto di una matrice reale $n \times n$ con una colonna nulla per un'altra matrice reale $n \times n$ non può mai essere una matrice $n \times n$ invertibile.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili, allora $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, -y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Ogni insieme di vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali è sempre linearmente indipendente.

V F c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_5 = 0$. Allora $W^\perp$ ammette come equazione cartesiana $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

V F d) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'intersezione fra l'immagine di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ e il nucleo di f^2 è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) La funzione da $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{R}$ che porta ogni polinomio p nel numero reale $p(1)$ è una trasformazione lineare.

V F c) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ che porta $(1,0)$ in $(1,1,1)$ e $(0,1)$ in $(2,2,2)$.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f(x,y) = (\cos x, \sin y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $-A$.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzione se e solo se $r(C) = r(A) + 1$.

V F c) Le operazioni colonna conservano il rango delle matrici reali.

V F d) Se due matrici reali diagonali $n \times n$ hanno rango n allora anche la loro somma ha rango n.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante uguale a 1 o a -1.

V F b) Se $n \geq 7$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i7} \cdot \det M_{i7}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Se una matrice quadrata reale A ha almeno una potenza con determinante nullo, allora A stessa ha determinante nullo.

V F d) Il determinante di una matrice reale 3×4 non è definito.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1,2,3) \wedge (2,4,6) = (0,0,0)$.

V F b) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $2x + 3y - z = 0$ e $x + y + 5z = 2$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Esiste una e una sola retta che ammette $(1,1,1)$ come terna di parametri direttori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni gruppo isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$ è commutativo.

V F b) L'insieme delle traslazioni della retta reale è un gruppo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F c) L'insieme dei numeri interi dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto è un anello.

V F d) Non esistono campi con esattamente 7 elementi.