Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V **F** c) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

V **F** d) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V **F** c) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V **F** d) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V **F** b) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V **F** c) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

V **F** d) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V **F** b) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V **F** c) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

V F b) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

V F b) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F c) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

V F d) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

V F b) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (-x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

V F c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}$.

V F d) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(-2, -4, -6) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

V F b) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ii} \cdot \det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

V F c) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V F d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Il prodotto vettoriale è associativo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

V F d) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

V F c) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V F d) Non esistono matrici di rango nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

V **F** c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

V **F** d) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

V **F** b) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

V **F** c) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Esistono campi di cardinalità finita.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

V **F** b) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

V **F** c) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

V **F** b) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

V **F** c) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

V **F** b) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

V **F** c) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

V **F** d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V **F** d) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

V **F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V **F** d) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

V **F** b) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

V **F** c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V **F** d) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

V **F** c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

V **F** d) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F c) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V F d) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

V F c) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V F d) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

V F c) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale è associativo.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F d) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V F d) $(-2, -4, -6) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V F c) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

V F d) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono campi di cardinalità finita.

V F b) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

V F c) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

V F b) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ii} \cdot \det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

V F d) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

V **F** b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0)\}$.

V **F** c) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V **F** d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z) = (-x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V **F** d) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V **F** b) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

V **F** c) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

V **F** d) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

V **F** c) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Non esistono matrici di rango nullo.

V **F** b) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V **F** c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

V **F** d) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** c) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

V **F** d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V **F** b) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

V **F** c) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

V **F** d) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

V **F** b) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V **F** c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (-x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** d) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V **F** b) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V **F** c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V **F** b) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

V **F** c) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V **F** b) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

V **F** c) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

V **F** d) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V **F** c) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

V **F** d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V **F** b) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V **F** c) $(-2, -4, -6) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

V **F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono campi di cardinalità finita.

V **F** b) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

V **F** c) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

V **F** d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V **F** c) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

V **F** d) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ii}\cdot\det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

V **F** b) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V **F** c) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V **F** d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V **F** b) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

V **F** d) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V **F** b) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

V **F** c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

V **F** d) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

V **F** b) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** d) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Il prodotto vettoriale è associativo.

V **F** c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V **F** d) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

V **F** b) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

V **F** c) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V **F** d) Non esistono matrici di rango nullo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V **F** b) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

V **F** c) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V **F** d) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

V **F** b) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

V **F** c) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

V **F** b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

V **F** c) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

V **F** b) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V **F** d) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V **F** b) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

V **F** c) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V **F** d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V **F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

V **F** d) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale è associativo.

V F b) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Esistono campi di cardinalità finita.

V F d) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F b) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

V F c) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

V F d) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F b) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

V F c) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

V F d) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1,0)$ che $(0,1)$ in $(1,1)$.

V F b) Il nucleo di un endomorfismo $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V F c) La funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z)=(x+1,y+2,x+3)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B'=\{(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B''=\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0)\}$.

V F b) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{w}\in V$.

V F c) L'endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z)=(-x,y,z)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x\star y=\min(x,y)$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$.

V F c) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

V F d) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x=0$ e $z=1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V F c) $(-2,-4,-6)\wedge(1,2,3)=(0,0,0)$.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F b) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V F c) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

V F d) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

V F b) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V F c) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F b) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V F c) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ii} \cdot \det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

V F b) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V F c) Non esistono matrici di rango nullo.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F b) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V **F** b) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

V **F** c) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

V **F** d) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

V **F** b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (-x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}$.

V **F** d) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V **F** b) $(-2, -4, -6) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

V **F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

V **F** c) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V **F** d) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

V F d) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

V F b) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

V F c) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

V F d) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

V F c) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V F b) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

V F d) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

V F b) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

V F c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

V F b) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

V F d) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

V F c) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

V F d) Esistono campi di cardinalità finita.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

V **F** b) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

V **F** c) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ii} \cdot \det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

V **F** b) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V **F** c) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V **F** d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

V **F** b) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V **F** c) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

V **F** b) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

V **F** c) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V **F** d) Non esistono matrici di rango nullo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V **F** c) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V **F** d) Il prodotto vettoriale è associativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V **F** c) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V **F** d) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

V **F** b) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

V **F** c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V **F** d) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

V **F** c) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

V **F** d) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

V **F** b) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

V **F** c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale è associativo.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F d) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

V F b) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V F c) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

V F b) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

V F c) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

V F c) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ii}\cdot\det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

V F b) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F c) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

V F d) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

V F b) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

V F c) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

V F d) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

V F d) Esistono campi di cardinalità finita.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (-x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V F d) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

V F b) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

V F b) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

V F c) Non esistono matrici di rango nullo.

V F d) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V F b) $(-2, -4, -6) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

V F c) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

V F b) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V F c) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

V F d) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

V F b) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V F d) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

V F c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V F d) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

V F b) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

V F c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F d) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** b) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

V **F** d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0)\}$.

V **F** b) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

V **F** c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z) = (-x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** d) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V **F** c) $(-2,-4,-6) \wedge (1,2,3) = (0,0,0)$.

V **F** d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

V **F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

V **F** b) Esistono campi di cardinalità finita.

V **F** c) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

V **F** d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** c) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

V **F** d) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V **F** b) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

V **F** c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

V **F** d) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V **F** b) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

V **F** b) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

V **F** c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V **F** d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Non esistono matrici di rango nullo.

V **F** b) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V **F** c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

V **F** d) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

V **F** b) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

V **F** c) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V **F** d) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Il prodotto vettoriale è associativo.

V **F** b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V **F** c) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V **F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V **F** c) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

V **F** d) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

V **F** b) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V **F** c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ii} \cdot \det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

V **F** d) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

V F c) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

V F d) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

V F d) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

V F b) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Il prodotto vettoriale è associativo.

V **F** c) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V **F** d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V **F** b) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

V **F** c) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

V **F** d) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono campi di cardinalità finita.

V **F** b) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

V **F** c) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

V **F** d) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V **F** b) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

V **F** c) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

V **F** d) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

V F d) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ii} \cdot \det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

V F c) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V F d) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

V F b) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F d) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

V F d) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

V F c) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V F d) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici di rango nullo.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

V F c) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V F d) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F c) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V F d) $(-2, -4, -6) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V F b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}$.

V F c) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (-x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{w},\mathbf{u}\rangle$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{w} \in V$.

V F b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0)\}$.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z) = (-x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) $(-2,-4,-6) \wedge (1,2,3) = (0,0,0)$.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V F b) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

V F c) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

V F b) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

V F c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F d) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F c) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

V F c) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

V F d) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V F b) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V F d) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F b) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

V F c) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V F d) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V F b) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

V F c) Non esistono matrici di rango nullo.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

V F b) Esistono campi di cardinalità finita.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V F b) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F c) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ii} \cdot \det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F b) Il prodotto vettoriale è associativo.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

V F b) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V F c) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

V F d) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

V F d) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F c) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

V F d) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V F b) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F b) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F c) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

V F d) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V F b) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F c) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V F b) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F b) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

V F c) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale è associativo.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V **F** b) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

V **F** c) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

V **F** d) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

V **F** c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

V **F** d) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

V **F** b) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

V **F** c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

V **F** d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

V **F** b) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

V **F** c) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V **F** d) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

V F b) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

V F d) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Esistono campi di cardinalità finita.

V F c) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

V F d) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

V F b) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V F c) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

V F d) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V F c) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

V F d) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici di rango nullo.

V F b) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

V F d) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (-x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}$.

V F d) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V F b) $(-2, -4, -6) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

V F b) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ii} \cdot \det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

V F d) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V **F** b) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V **F** b) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

V **F** c) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

V **F** d) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V **F** d) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

V **F** d) Esistono campi di cardinalità finita.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

V F b) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0)\}$.

V F c) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z) = (-x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V F d) $(-2,-4,-6) \wedge (1,2,3) = (0,0,0)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

V F c) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

V F b) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

V F c) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

V F d) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V F b) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F c) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V F b) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

V F c) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V F d) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

V F c) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

V F d) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V F b) Non esistono matrici di rango nullo.

V F c) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F c) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

V F d) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

V F b) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V F d) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

V F b) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F d) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V F b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

V F c) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ii} \cdot \det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F c) Il prodotto vettoriale è associativo.

V F d) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F d) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice quadrata reale il cui polinomio caratteristico non ammetta radici reali è necessariamente di ordine pari.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F c) Una matrice quadrata reale è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette radici reali.

V F d) Esistono matrici quadrate reali che ammettono un numero infinito di autovalori.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 5 ha sempre rango 5.

V F b) Il rango è una funzione lineare sullo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$.

V F c) Esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F d) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di m equazioni in n incognite non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x-1, y-1, z-1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Il nucleo e l'immagine di un endomorfismo di $\mathbb{R}^9$ non possono mai avere la stessa dimensione.

V F c) Esistono trasformazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^7$.

V F d) Ogni automorfismo di uno spazio vettoriale porta i vettori non nulli in vettori non nulli.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 1, z = 2$ e $x = 2, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F b) Il prodotto vettoriale è associativo.

V F c) Ogni piano di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $y = -3$ e $x + y + z = -3$ sono fra loro ortogonali.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni gruppo di cardinalità 2 è commutativo.

V **F** b) L'insieme dato dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado pari nella variabile x e a coefficienti reali è un sottogruppo del gruppo dei polinomi nella variabile x e a coefficienti reali rispetto all'operazione indotta.

V **F** c) Esistono campi di cardinalità finita.

V **F** d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esiste almeno un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$ di cardinalità 5 che non è una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** b) Lo spazio vettoriale reale nullo ammette una e una sola base.

V **F** c) Le funzioni kx^k per k intero positivo sono tutte fra loro linearmente indipendenti nello spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono un sistema finito di generatori.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La somma fra matrici reali $n \times n$ è associativa.

V **F** b) La matrice 8×8 reale $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i^2 + j^2$ ha determinante nullo.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali diagonali 100×100 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V **F** d) Sia A una matrice quadrata reale. Se A^n ha determinante uguale a -1, allora anche la matrice A ha determinante uguale a -1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** b) L'insieme delle isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è un gruppo non commutativo rispetto all'usuale composizione.

V **F** c) Ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione da V in V.

V **F** d) Tutti i prodotti scalari sono bilineari.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono infinite matrici reali 7×7 che hanno determinante uguale a 1.

V **F** b) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V **F** c) Si possono trovare due matrici reali A, B di tipo 5×5 tali che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

V **F** d) Se due matrici reali 2×2 hanno la stessa traccia e lo stesso determinante allora coincidono.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard e i sistemi lineari considerati devono intendersi a coefficienti reali.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali $n \times n$ non hanno lo stesso determinante non possono essere simili.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale della sua molteplicità algebrica.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) Se due matrici quadrate reali non sono simili, allora non possono avere lo stesso polinomio caratteristico.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono spazi vettoriali privi di sottospazi vettoriali.

V F b) Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita privi di sistemi di generatori.

V F c) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, rispetto alle operazioni indotte.

V F d) L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(2) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici reali 3×3 antisimmetriche sono non invertibili.

V F b) La matrice somma di due matrici reali $n \times n$ diagonali è sempre una matrice reale $n \times n$ diagonale.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha determinante nullo.

V F d) Tutte le matrici reali $n \times n$ diagonali sono invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (-x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Nello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ si può definire uno e un solo prodotto scalare.

V F c) Sia W il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^5$ che ha come base $B' = \{(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$. Allora $W^\perp$ ha come base $B'' = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}$.

V F d) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si riduce al solo vettore nullo se e solo se f è un automorfismo.

V F b) La funzione inversa di un isomorfismo tra spazi vettoriali è sempre una trasformazione lineare.

V F c) Esiste un'unica trasformazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ che porta sia $(1, 0)$ che $(0, 1)$ in $(1, 1)$.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+1, y+2, x+3)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale A ha lo stesso rango della sua trasposta.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C non ammette soluzione se e solo se $r(C) > r(A)$.

V F c) Il rango di una matrice reale 5×8 non può mai essere 7.

V F d) Non esistono matrici di rango nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono matrici ortogonali che abbiano determinante negativo.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ii} \cdot \det M_{jj}$, dove M_{jj} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{jj}.

V F c) Ogni matrice reale triangolare i cui termini siano tutti non negativi ha sempre determinante non negativo.

V F d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(BA)$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(-2, -4, -6) \wedge (1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

V F b) Per ogni punto passa una e una sola retta parallela a un piano dato.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 0$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Ogni retta ammette una e una sola terna di parametri direttori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le funzioni iniettive sono anche biunivoche.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = \min(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F c) L'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto non è un campo.

V F d) Esiste un numero infinito di anelli finiti fra loro non isomorfi.