Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x\star y = x-y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V **F** c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V **F** d) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V **F** c) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

V **F** b) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V **F** c) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n\times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

V **F** d) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V **F** b) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V **F** c) Per ogni matrice quadrata reale A $n\times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

V **F** d) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V F c) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp + \dim W = n$.

V F d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V F d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

V F c) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

V F d) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

V F b) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

V F c) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V F d) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

V F c) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U+\dim V$.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

V F b) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

V F b) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F c) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

V F b) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F d) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F c) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F d) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

V F d) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

V F c) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V F d) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V F b) Per ogni matrice quadrata reale A $n \times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

V F c) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V F d) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

V F b) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

V F c) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F d) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

V F d) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F c) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp + \dim W = n$.

V F c) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F c) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

V F d) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V F b) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F c) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

V F d) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

V F b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U+\dim V$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F b) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V F c) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

V F d) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

V **F** b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

V **F** d) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U+\dim V$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V **F** b) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

V **F** c) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V **F** d) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

V **F** c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** d) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp+\dim W = n$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V **F** b) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V **F** c) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V **F** d) Per ogni matrice quadrata reale A $n\times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F c) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

V F d) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

V F c) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

V F c) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

V F b) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F b) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

V F c) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V F d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F b) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F d) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

V F d) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

V F d) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

V F b) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

V F c) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V F d) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V F b) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

V F d) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

V F b) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U+\dim V$.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F b) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V F d) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V F b) Per ogni matrice quadrata reale A $n\times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

V F c) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F d) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) $(1,0,0) \wedge (0,-1,0) = (0,0,-1)$.

V **F** b) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

V **F** c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

V **F** d) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

V **F** d) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V **F** b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

V **F** c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

V **F** b) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

V **F** c) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V **F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

V **F** b) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** d) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp + \dim W = n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F c) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

V F d) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

V F b) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V F c) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

V F d) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F c) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

V F d) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V F c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

V F b) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V F c) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F d) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

V F d) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V **F** b) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

V **F** c) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

V **F** d) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** c) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp + \dim W = n$.

V **F** d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V **F** b) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

V **F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V **F** b) Per ogni matrice quadrata reale A $n \times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

V **F** c) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V **F** d) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F b) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

V F c) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ si ha che $\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|\leq\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|$.

V F c) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

V F d) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F b) Il polinomio $7\lambda^2+2\lambda-3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

V F d) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

V F b) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

V F c) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V F d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

V F b) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

V F c) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V F d) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

V F c) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V **F** b) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V **F** c) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V **F** d) Per ogni matrice quadrata reale A $n\times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

V **F** b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** c) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V **F** d) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V **F** c) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V **F** d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

V **F** b) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V **F** c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

V F b) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

V F d) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

V F b) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

V F b) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

V F c) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

V F b) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U+\dim V$.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

V F c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F d) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

V F c) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F b) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

V F c) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** c) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

V **F** d) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp + \dim W = n$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

V **F** b) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

V **F** b) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

V **F** c) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V **F** d) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V **F** b) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

V **F** c) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

V **F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

V F b) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V F c) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F d) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni matrice quadrata reale A $n\times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

V F b) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V F c) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V F d) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

V **F** c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

V **F** d) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U+\dim V$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp+\dim W = n$.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V **F** c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V **F** c) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

V **F** d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

V **F** d) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

V F d) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

V F b) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

V F c) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F b) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V **F** b) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V **F** c) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

V **F** d) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

V **F** b) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

V **F** c) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V **F** d) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

V **F** b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

V **F** c) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

V **F** d) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

V **F** d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V **F** b) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V **F** c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V **F** b) Per ogni matrice quadrata reale A $n \times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

V **F** c) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V **F** d) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

V **F** c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

V **F** d) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V **F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

V **F** d) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

V **F** b) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

V **F** c) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

V F c) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

V F b) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U+\dim V$.

V F d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V F b) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

V F c) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

V F d) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

V F d) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

V F b) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

V F d) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F d) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F b) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

V F c) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V F d) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F d) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

V F b) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp + \dim W = n$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp + \dim W = n$.

V F c) L'endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z)=(x,2y,3z)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x=t, y=1, z=t$ ammette $(1,0,1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x+y+5z=0$ e $3x+3y+15z=1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) $(-1,0,0)\wedge(0,0,-1)=(0,1,0)$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V F b) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

V F c) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n\times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

V F d) Una matrice reale $n\times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n\geq 2$ e $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+n}\cdot a_{in}\cdot\det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$, si ha che $\det(BA)=\det A\cdot\det B$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F c) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

V F d) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F b) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

V F c) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F b) Per ogni matrice quadrata reale A $n \times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

V F c) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V F d) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V F b) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

V F c) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F d) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

V F c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

V F c) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V **F** c) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

V **F** d) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

V **F** c) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U+\dim V$.

V **F** d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V **F** d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** b) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

V **F** c) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

V **F** d) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V F b) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F c) Per ogni matrice quadrata reale A $n\times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n\times n$.

V F d) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

V F b) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

V F c) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \le \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

V F d) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

V F b) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F d) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

V F b) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

V F d) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U + \dim V$.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

V F c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

V F b) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V F c) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F d) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F b) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V F c) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

V F d) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp + \dim W = n$.

V F d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V **F** b) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V **F** b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** c) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V **F** c) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

V **F** d) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$.

V F b) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp + \dim W = n$.

V F c) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

V F d) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

V F b) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U+\dim V$.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F b) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

V F c) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V F b) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F c) Per ogni matrice quadrata reale A $n\times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

V F d) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F c) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V F b) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F c) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

V F d) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

V F c) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

V F d) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

V F d) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F b) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F c) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V F b) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

V F c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

V F d) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

V F d) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il polinomio $7\lambda^2 + 2\lambda - 3$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali simmetriche prive di autovalori reali.

V **F** c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n.

V **F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Per ogni matrice quadrata reale A $n\times n$ esiste un numero naturale k tale che A^k è la matrice nulla $n \times n$.

V **F** b) Nessuna matrice ortogonale ha determinante uguale a 2.

V **F** c) Non esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V **F** d) Ogni sistema lineare la cui matrice incompleta sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V **F** c) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è un isomorfismo allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali privi di endomorfismi.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, x = 1$ sono fra loro sghembe.

V **F** b) $(1, 0, 0) \wedge (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$.

V **F** c) Un piano ammette sempre un numero infinito di equazioni parametriche distinte.

V **F** d) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante positivo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** c) Tutti gli anelli commutativi sono anche campi.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ sono finitamente generati.

V **F** c) Tutti gli spazi vettoriali ammettono almeno una base finita.

V **F** d) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U+\dim V$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A, B, C, D sono matrici reali 7×7, allora $(A + B)(C - D) = BC - AD - BD + AC$.

V **F** b) Se la quarta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 3×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V **F** d) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** b) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $-f$ lo è.

V **F** c) $\mathbb{R}^5$ ammette un unico prodotto scalare.

V **F** d) Esistono vettori di $\mathbb{R}^9$ che non sono ortogonali a nessun altro vettore di $\mathbb{R}^9$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 5 tutti i suoi elementi si ottiene una matrice il cui determinante è il quintuplo del determinante di A.

V **F** b) Il determinante di una matrice quadrata reale coincide sempre con quello della sua trasposta.

V **F** c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(BA) = \det A \cdot \det B$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovalori reali di f.

V F b) Esistono endomorfismi dotati di autovalori che hanno molteplicità geometrica nulla.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se ha n autovalori reali distinti.

V F d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante allora hanno anche lo stesso polinomio caratteristico.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La somma di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F d) Le matrici associate a un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse sono sempre tra loro simili.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni combinazione lineare di due matrici reali $n\times n$ invertibili è una matrice reale invertibile.

V F b) La trasposta di una matrice reale simmetrica è sempre una matrice reale simmetrica.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è non invertibile se e solo se ha rango strettamente inferiore a n.

V F d) Se due matrici reali invertibili hanno la stessa inversa, allora coincidono.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due diversi fra loro è linearmente indipendente.

V F c) Se $W^\perp$ è l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp + \dim W = n$.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora il nucleo di $f \circ f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** b) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice $A + I$ (dove I è la matrice reale identica 3×3) è una trasformazione lineare.

V **F** c) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e S è un sistema di generatori per V, allora $f(S)$ è un sistema di generatori per W.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (|x|, |y|, |z|)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Unendo due sistemi lineari che ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che ammette soluzione.

V **F** b) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se $m = n$.

V **F** c) Per ogni numero naturale k esistono infinite matrici reali di rango k.

V **F** d) La matrice reale identica $n \times n$ è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello della sua opposta $-A$.

V **F** b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale nulla è sempre nullo.

V **F** d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = -\det A$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) $(-1, 0, 0) \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$.

V **F** b) Per ogni punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data.

V **F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 1, z = t$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = x - y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V **F** c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi è non commutativo.

V **F** d) $(\mathbb{Z}_{31}, +, \cdot)$ è un campo.