Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

V F b) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V F c) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

V F d) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F b) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V F c) Ogni somma di due matrici reali $n\times n$ non invertibili è una matrice reale $n\times n$ non invertibile.

V F d) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

V F d) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V F c) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A + B) = \det A \cdot \det B$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp \leq \dim W$.

V F d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(3, 7, 22) \wedge (3, 7, 22) = (0, 0, 0)$.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

V F b) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V F d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

V F c) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

V F d) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

V F b) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

V F c) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V F d) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

V **F** c) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=n$.

V **F** d) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $f: V\to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

V **F** b) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

V **F** c) Se $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f\circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** d) La funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z)=(-x,z,-z)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A, B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

V **F** b) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V **F** c) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB))=\alpha\beta\det A\det B$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

V **F** b) Il polinomio λ^2-1 non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

V **F** c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

V **F** d) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F c) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A + B) = \det A \cdot \det B$.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

V F d) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V F d) Ogni somma di due matrici reali $n\times n$ non invertibili è una matrice reale $n\times n$ non invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

V F c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

V F d) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

V F b) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

V F c) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

V F c) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V F d) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

V F d) $(3, 7, 22) \wedge (3, 7, 22) = (0, 0, 0)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V F c) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$.

V F b) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp \leq \dim W$.

V F c) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

V F d) L'endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z)=(z,y,x)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V F b) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

V F d) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V F b) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F c) Se A,B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

V F d) Se A,B sono matrici reali 7×7 e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB))=\alpha\beta\det A\det B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

V F b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=n$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F b) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V F c) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

V F d) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

V F d) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V F b) Se A, B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

V F c) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F d) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB))=\alpha\beta\det A\det B$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\geq\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$.

V F b) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

V F c) L'endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z)=(z,y,x)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp\leq\dim W$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

V F b) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F c) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F c) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A + B) = \det A \cdot \det B$.

V F d) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

V F c) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

V F c) $(3, 7, 22) \wedge (3, 7, 22) = (0, 0, 0)$.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V **F** c) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

V **F** d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

V **F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

V **F** c) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V **F** d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V **F** b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V **F** b) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

V **F** c) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

V **F** d) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

V **F** b) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** d) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

V F d) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

V F b) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

V F c) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V F d) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V F b) Ogni somma di due matrici reali $n\times n$ non invertibili è una matrice reale $n\times n$ non invertibile.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

V F b) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=n$.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F b) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB))=\alpha\beta\det A\det B$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V F d) Se A, B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

V F c) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F d) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f: U\to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) La funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z)=(x,y,x+y)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f:\mathbb{R}^9\to\mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F d) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1,0,0) \wedge (0,0,1) = (0,1,0)$.

V F b) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

V F d) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A + B) = \det A \cdot \det B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

V F c) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

V F b) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp \leq \dim W$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

V F b) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V F c) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

V F d) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) $(3, 7, 22) \wedge (3, 7, 22) = (0, 0, 0)$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F b) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V F c) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

V F d) Ogni somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è una matrice reale $n \times n$ non invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F c) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V F c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

V F d) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

V F b) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V F c) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F d) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V F c) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

9 settembre 2019 N. di Matricola: 01101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V F b) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

V F c) Ogni somma di due matrici reali $n\times n$ non invertibili è una matrice reale $n\times n$ non invertibile.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp \leq \dim W$.

V F d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(3, 7, 22) \wedge (3, 7, 22) = (0, 0, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

V F c) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F d) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A + B) = \det A \cdot \det B$.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V F b) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V F b) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

V F c) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F b) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

V F d) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F b) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

V F d) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V) + \dim(U \cap V) = n$.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB)) = \alpha\beta \det A \det B$.

V F b) Se A, B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V F c) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F d) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V F d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

V F b) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

V F c) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V F d) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

V F c) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V F b) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A+B) = \det A \cdot \det B$.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V F d) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F c) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

V F b) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1,0,0) \wedge (0,0,1) = (0,1,0)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

V F d) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

V F c) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

V F b) Ogni somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è una matrice reale $n \times n$ non invertibile.

V F c) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

V **F** b) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=n$.

V **F** c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A=0$.

V **F** b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

V **F** c) Se $A\in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}$.

V **F** d) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V **F** b) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

V **F** c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

V **F** d) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V **F** b) Se A,B sono matrici reali 7×7 e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB))=\alpha\beta\det A\det B$.

V **F** c) Se A,B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

V F d) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^{\perp} \leq \dim W$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

V F b) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

V F c) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F d) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(3, 7, 22) \wedge (3, 7, 22) = (0, 0, 0)$.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A, B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V **F** c) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V **F** d) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB)) = \alpha\beta \det A \det B$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

V **F** b) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V **F** c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

V **F** d) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

V **F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V **F** d) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A + B) = \det A \cdot \det B$.

V **F** c) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V **F** d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

V F c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

V F d) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=n$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^{\perp} \leq \dim W$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$.

V F c) L'endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z)=(z,y,x)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x+y+5z=0$ e $3x+3y+15z=1$ sono fra loro paralleli.

V F b) La retta di equazione parametrica $x=2t, y=2t, z=2t$ ammette $(1,1,1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) $(3,7,22)\wedge(3,7,22)=(0,0,0)$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V F c) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

V F c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** c) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

V **F** d) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V **F** b) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

V **F** c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

V **F** d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V **F** c) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V **F** d) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

V **F** b) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

V **F** c) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V **F** d) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V **F** b) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V **F** c) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

V **F** d) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è una matrice reale $n \times n$ non invertibile.

V **F** b) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

V **F** c) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V **F** d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V **F** b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

V **F** c) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

V **F** d) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V **F** c) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

V **F** d) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

V **F** b) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V **F** c) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

V **F** d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

V **F** c) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

V **F** d) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V **F** c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

V **F** d) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V **F** b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

V **F** d) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

V **F** b) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

V **F** c) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V **F** c) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

V **F** d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A + B) = \det A \cdot \det B$.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = n$.

V F d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V F b) Se A, B sono matrici reali 8×8, allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

V F c) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB)) = \alpha\beta \det A \det B$.

V F d) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

V F d) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

V F b) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

V F b) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Ogni somma di due matrici reali $n\times n$ non invertibili è una matrice reale $n\times n$ non invertibile.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F d) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F b) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

V F c) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V F d) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V F d) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F d) $(3, 7, 22) \wedge (3, 7, 22) = (0, 0, 0)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

V F b) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp \leq \dim W$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$.

V F b) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp \leq \dim W$.

V F c) L'endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z)=(z,y,x)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x=2t, y=2t, z=2t$ ammette $(1,1,1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x+y+5z=0$ e $3x+3y+15z=1$ sono fra loro paralleli.

V F c) $(3,7,22)\wedge(3,7,22)=(0,0,0)$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V F b) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

V F c) Ogni somma di due matrici reali $n\times n$ non invertibili è una matrice reale $n\times n$ non invertibile.

V F d) Una matrice reale $n\times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n\geq 2$ e $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1\leq j\leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$, si ha che $\det(A+B)=\det A\cdot\det B$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F c) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V F b) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

V F c) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F b) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

V F c) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

V F d) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F d) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V F b) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

V F c) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F d) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V F b) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

V F c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

V F d) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F c) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A, B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V F b) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V F c) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB)) = \alpha\beta \det A \det B$.

V F d) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

V F c) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V) + \dim(U \cap V) = n$.

V F d) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

V F b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F b) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

V F c) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

V F d) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

V F b) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

V F d) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

V F b) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

V F c) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A + B) = \det A \cdot \det B$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

V F d) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

V F d) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

V F b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F d) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

V F b) Ogni somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è una matrice reale $n \times n$ non invertibile.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=n$.

V **F** b) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

V **F** c) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

V **F** d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A,B sono matrici reali 7×7 e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB))=\alpha\beta\det A\det B$.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V **F** c) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V **F** d) Se A,B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V **F** b) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

V **F** c) Una matrice reale $n\times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V **F** d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F c) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F b) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V F c) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

V F d) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp \leq \dim W$.

V F d) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(3, 7, 22) \wedge (3, 7, 22) = (0, 0, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V F c) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

V F d) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V **F** b) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V **F** b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** c) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A + B) = \det A \cdot \det B$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V **F** c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

V **F** d) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** b) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$.

V F b) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp \leq \dim W$.

V F c) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

V F d) L'endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z)=(z,y,x)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x=2t, y=2t, z=2t$ ammette $(1,1,1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x+y+5z=0$ e $3x+3y+15z=1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

V F d) $(3,7,22)\wedge(3,7,22)=(0,0,0)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

V F b) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=n$.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V F b) Se A,B sono matrici reali 7×7 e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB))=\alpha\beta\det A\det B$.

V F c) Se A,B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.

V F b) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.

V F d) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F b) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

V F c) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

V F d) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V F b) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F c) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

V F d) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F c) Ogni somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è una matrice reale $n \times n$ non invertibile.

V F d) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

V F d) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F b) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.

V F c) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V F b) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

V F c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

V F d) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F d) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

V F d) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il polinomio $\lambda^2 - 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice reale 5×5.
V F b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.
V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se non ha autovalori reali.
V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre superiore alla sua molteplicità algebrica.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ di rango strettamente inferiore a n allora anche la matrice AB ha rango strettamente inferiore a n.
V F b) Tutte le matrici ortogonali hanno determinante 1.
V F c) Esistono sistemi lineari omogenei privi di soluzione.
V F d) Ogni sistema lineare la cui matrice completa sia quadrata e invertibile ammette un'unica soluzione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, y, x + y)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.
V F c) Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ è una trasformazione lineare allora la dimensione del nucleo di f è 0.
V F d) Esistono spazi vettoriali non banali privi di automorfismi.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $y = 0, z = 1$ e $y = 1, z = 2$ sono fra loro sghembe.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.
V F c) Ogni piano ammette sempre un numero infinito di equazioni cartesiane distinte.
V F d) Il piano di equazione cartesiana $y = 5$ e la retta di equazione cartesiana $x + z = -1, y = 0$ sono fra loro paralleli.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a determinante nullo è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto righe per colonne.

V **F** c) Tutti gli anelli commutativi hanno divisori dello zero.

V **F** d) L'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensione finita.

V **F** c) Tutti gli spazi vettoriali finitamente generati ammettono almeno una base.

V **F** d) Se U e V sono due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $\dim(U+V) + \dim(U \cap V) = n$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A, B sono matrici reali 8×8, allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

V **F** b) Se la quinta potenza di una matrice quadrata reale A ha determinante nullo allora A non è invertibile.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 4×4 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne fra matrici.

V **F** d) Se A, B sono matrici reali 7×7 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\det((\alpha\beta)(AB)) = \alpha\beta \det A \det B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** b) Se f è una isometria di uno spazio vettoriale euclideo allora anche $f \circ f$ lo è.

V **F** c) $\mathbb{R}^5$ ammette un'unica base ortonormale.

V **F** d) L'unico vettore di $\mathbb{R}^9$ ortogonale a se stesso è il vettore nullo di $\mathbb{R}^9$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se in una matrice quadrata reale A si aggiunge 5 a ciascun suo elemento si ottiene una matrice il cui determinante è uguale al determinante di A.

V **F** b) Il determinante di una matrice quadrata reale A coincide sempre con quello di A^2.

V **F** c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora, per ogni indice j con $1 \leq j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, si ha che $\det(A+B) = \det A \cdot \det B$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Le radici reali del polinomio caratteristico di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli gli autovettori di f.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotati di n autovalori tutti di molteplicità geometrica 1.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n.

V F d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante e la stessa traccia.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ogni sistema di generatori di U ha cardinalità inferiore o uguale a n.

V F c) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono trasformazioni lineari allora $g - f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare.

V F d) La similitudine fra matrici reali $n \times n$ è una relazione di equivalenza.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni somma di due matrici reali $n\times n$ non invertibili è una matrice reale $n\times n$ non invertibile.

V F b) La trasposta di una matrice reale diagonale è sempre una matrice reale diagonale.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha traccia non nulla.

V F d) Le matrici triangolari sono sempre invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) = (z, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Ogni insieme di vettori di $\mathbb{R}^n$ che siano non nulli e a due a due ortogonali fra loro è linearmente indipendente.

V F c) Se W è un sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp \leq \dim W$.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \geq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare, allora l'immagine di $f \circ f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

V F b) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale A nella matrice A^5 è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : V \to V$ è un automorfismo e S è una base per V, allora anche $f(S)$ è una base per V.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (-x, z, -z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Unendo due sistemi lineari che non ammettono soluzione si ottiene sempre un sistema lineare che non ammette soluzione.

V F b) Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se le sue m equazioni sono linearmente indipendenti.

V F c) Per ogni numero naturale k esistono esattamente k matrici reali di rango k.

V F d) Ogni matrice reale diagonale è allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata reale A di tipo 4×4 coincide sempre con il determinante di $-A$.

V F b) Sia A una matrice quadrata reale 5×5. Se il minore complementare di ogni elemento di A è non invertibile allora $\det A = 0$.

V F c) Il determinante di ogni matrice quadrata reale di ordine dispari è sempre nullo.

V F d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(3, 7, 22) \wedge (3, 7, 22) = (0, 0, 0)$.

V F b) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a una retta data.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali.

V F b) L'insieme dei numeri reali positivi è un gruppo rispetto all'operazione prodotto.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 10 elementi è commutativo.

V F d) $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ è un campo.