Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F b) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V F c) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V F b) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F b) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V F c) Per ogni coppia (A, B) di matrici reali è definita la somma $A + B$.

V F d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

V F b) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

V F b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F c) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

V F d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

V F b) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

V F c) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

V F d) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

V F b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F c) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F c) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1, 0, 0, 0, 0)\}$.

V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x - 2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

V F b) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V F d) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s - 1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

V F c) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) $(1, 1, 1) \wedge (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle|$.

V F c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

V F c) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V F d) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

V F b) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U+W) = 5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F c) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$, allora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$.

V F d) La coppia $((1,2),(2,1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

V F b) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

V F c) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z) = (x,x,0)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $AB \neq BA$.

V F b) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

V F c) Se A, B, C, D sono matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A+B)(C+D) = (AC+BD) + (AD+BC)$.

V F d) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

V F b) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \ldots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V **F** c) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

V **F** b) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

V **F** b) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

V **F** c) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

V **F** d) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

V **F** c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

V **F** d) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V F b) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F c) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V F d) Per ogni coppia (A, B) di matrici reali è definita la somma $A + B$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

V F c) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V F d) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

V F b) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 1, 1) \wedge (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F d) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s - 1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F c) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V F d) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x+y+z = 1$ e $2x-2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F d) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, x, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F c) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F b) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

V F c) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

V F b) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V F c) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1,0,0,0,0)\}$.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2,x_1,x_4,x_3)$ per ogni $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

V F b) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $AB \neq BA$.

V F d) Se A, B, C, D sono matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A+B)(C+D) = (AC+BD) + (AD+BC)$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La coppia $((1,2),(2,1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$.

V F b) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U+W) = 5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F c) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

V F d) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v}+\mathbf{w} \in U$, allora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

V F b) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

V F d) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La coppia $((1,2),(2,1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$.

V F b) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

V F c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U+W)=5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F d) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v}+\mathbf{w} \in U$, allora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $AB \neq BA$.

V F c) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

V F d) Se A, B, C, D sono matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A+B)(C+D) = (AC+BD) + (AD+BC)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1,0,0,0,0)\}$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V F b) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

V F c) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

V F d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

V F c) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

V F d) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

V F b) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

V F c) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

V F d) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

V F d) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F c) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x - 2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F b) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F c) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

V **F** c) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

V **F** d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

V **F** c) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V **F** d) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V **F** b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** c) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V **F** d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V **F** b) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

V **F** c) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V **F** d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle|$.

V F d) L'angolo fra i due vettori $(1,0,1),(0,1,1)$ è di $\pi/3$ radianti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $z=0$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z=2, z=1$ sono fra loro paralleli.

V F b) $(1,1,1)\wedge(0,0,0)=(1,1,1)$.

V F c) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x=t, y=t, z=t$ e $x=s, y=s-1, z=2s$ sono fra loro sghembe.

V F d) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A)<r(C)$.

V F b) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

V F c) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V F d) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V F b) Per ogni coppia (A,B) di matrici reali è definita la somma $A+B$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F d) Il prodotto fra matrici reali $n\times n$ è associativo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f: V\to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1),\dots,f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

V F c) Ogni trasformazione lineare $f: U\to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F d) La funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z)=(x,x,0)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U+W)=5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V **F** b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v}+\mathbf{w}\in U$, allora $\mathbf{v},\mathbf{w}\in U$.

V **F** c) La coppia $((1,2),(2,1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_3^2,+,\cdot)$.

V **F** d) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

V **F** b) Se A,B,C,D sono matrici reali $n\times n$ si ha sempre che $(A+B)(C+D)=(AC+BD)+(AD+BC)$.

V **F** c) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ si ha sempre che $AB\neq BA$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V **F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

V **F** c) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

V **F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** b) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Esistono trasformazioni lineari $f:\mathbb{R}^8\to\mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

V **F** d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 1, 1) \wedge (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

V F b) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F c) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s - 1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

V F d) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F d) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

V F b) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

V F c) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

V F d) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

V F b) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

V F c) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

V F b) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F c) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \geq |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|$.

V F d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

V F b) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, x, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1, 0, 0, 0, 0)\}$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F b) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x - 2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V **F** b) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V **F** c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V **F** d) Per ogni coppia (A, B) di matrici reali è definita la somma $A + B$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \ldots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V **F** b) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V **F** c) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

V **F** b) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V **F** c) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

V **F** d) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

V **F** b) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V **F** c) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

V **F** d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V **F** c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

V **F** d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V F b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V F c) Per ogni coppia (A, B) di matrici reali è definita la somma $A + B$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1, 0, 0, 0, 0)\}$.

V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x - 2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

V F c) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

V F d) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

V **F** b) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

V **F** d) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

V **F** b) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

V **F** c) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

V **F** d) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

V **F** c) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V **F** d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

V **F** d) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V **F** b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** d) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle|$.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1,0,1),(0,1,1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F d) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

V F b) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

V F c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v}+\mathbf{w}\in U$, allora $\mathbf{v},\mathbf{w}\in U$.

V F b) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

V F c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U+W)=5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F d) La coppia $((1,2),(2,1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_3^2,+,\cdot)$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F c) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

V F d) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A, B, C, D sono matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)(C + D) = (AC + BD) + (AD + BC)$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $AB \neq BA$.

V F c) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

V F d) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

V F c) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V F d) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1, \dots , \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots , f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

V F c) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, x, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

V F b) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

V F c) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V F d) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s - 1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F d) $(1, 1, 1) \wedge (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

V **F** b) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

V **F** c) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V **F** d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

V **F** b) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

V **F** c) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

V **F** d) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

V **F** c) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

V **F** d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

V **F** b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

V **F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** d) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

V F b) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|$.

V F d) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 1, 1) \wedge (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s - 1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

V F d) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

V F c) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V F d) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \ldots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V F b) Per ogni coppia (A, B) di matrici reali è definita la somma $A + B$.

V F c) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V F d) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U+W)=5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v}+\mathbf{w}\in U$, allora $\mathbf{v},\mathbf{w}\in U$.

V F c) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

V F d) La coppia $((1,2),(2,1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_3^2,+,\cdot)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\cdot a_{i1}\cdot\det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Siano A e B due matrici reali $n\times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB)\neq 0$.

V F c) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

V F d) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A=1$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

V F c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

V F d) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

V F b) Se A,B,C,D sono matrici reali $n\times n$ si ha sempre che $(A+B)(C+D)=(AC+BD)+(AD+BC)$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ si ha sempre che $AB\neq BA$.

V F d) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F d) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

V F d) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1, 0, 0, 0, 0)\}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, x, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

V F b) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

V F c) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

V F d) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x - 2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $AB \neq BA$.

V **F** b) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

V **F** c) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

V **F** d) Se A, B, C, D sono matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)(C + D) = (AC + BD) + (AD + BC)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

V **F** b) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

V **F** c) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V **F** d) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

V **F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

V **F** b) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

V **F** c) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

V **F** d) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

V F b) La coppia $((1, 2), (2, 1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$.

V F c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U + W) = 5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F d) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$, allora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1, 0, 0, 0, 0)\}$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot, \cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x - 2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F b) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

V F d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F c) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\geq|\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle|$.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1,0,1),(0,1,1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

V F b) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

V F c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{u},\mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v}\in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1,\dots,a_n)$ tale che $\mathbf{v}=a_1\mathbf{v}_1+\ldots+a_n\mathbf{v}_n$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V F d) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

V F b) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

V F d) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni coppia (A, B) di matrici reali è definita la somma $A + B$.

V F b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V F c) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V F d) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 1, 1) \wedge (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s - 1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F d) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, x, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F c) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

V F b) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V F c) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V **F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

V **F** c) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

V **F** d) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

V **F** c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

V **F** d) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** b) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

V **F** d) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

V **F** c) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) $(1, 1, 1) \wedge (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F d) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s - 1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

V F b) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

V F c) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

V F d) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F b) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La coppia $((1, 2), (2, 1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$.

V F b) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

V F c) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$, allora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$.

V F d) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U + W) = 5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $AB \neq BA$.

V F c) Se A, B, C, D sono matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)(C + D) = (AC + BD) + (AD + BC)$.

V F d) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V **F** c) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V **F** d) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

V **F** b) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** c) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V **F** d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V **F** b) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V **F** d) Per ogni coppia (A, B) di matrici reali è definita la somma $A + B$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V **F** c) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \ldots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, x, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

V F c) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

V F c) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V F d) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x+y+z = 1$ e $2x-2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F d) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

V F b) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1, 0, 0, 0, 0)\}$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u},\mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1,0,0,0,0)\}$.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2,x_1,x_4,x_3)$ per ogni $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1,1,1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x+y+z = 1$ e $2x-2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) $(0,0,1) \wedge (0,0,1) = (0,1,0)$.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V F b) Il prodotto fra matrici reali $n\times n$ è associativo.

V F c) Per ogni coppia (A,B) di matrici reali è definita la somma $A+B$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

V F b) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

V F c) Sia A una matrice $n\times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1,\ldots,n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.

V F d) Ogni matrice $n\times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V **F** b) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V **F** c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

V **F** d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V **F** b) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

V **F** d) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V **F** b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** d) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \ldots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

V **F** b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

V **F** c) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V **F** d) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

V **F** b) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V **F** d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V F b) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

V F c) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F c) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V F b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

V F c) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

V F d) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s - 1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

V F b) $(1, 1, 1) \wedge (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

V F c) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $AB \neq BA$.

V F b) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

V F c) Se A, B, C, D sono matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A+B)(C+D) = (AC+BD) + (AD+BC)$.

V F d) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

V F b) La coppia $((1,2),(2,1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$.

V F c) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$, allora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$.

V F d) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U+W) = 5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

V F d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z) = (x,x,0)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|$.

V F b) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

V F c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'angolo fra i due vettori $(1,0,1), (0,1,1)$ è di $\pi/3$ radianti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V F b) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

V F c) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

V F d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

V F b) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 1, 1) \wedge (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F d) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s - 1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

V F b) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

V F c) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

V F d) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

V F c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

V F d) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

V F c) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F d) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V F d) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

V F b) Per ogni coppia (A, B) di matrici reali è definita la somma $A + B$.

V F c) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F d) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$, allora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$.

V F b) La coppia $((1, 2), (2, 1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$.

V F c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U + W) = 5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F d) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F c) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

V F d) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A, B, C, D sono matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)(C + D) = (AC + BD) + (AD + BC)$.

V F b) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

V F c) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $AB \neq BA$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

V F c) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, x, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F c) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

V F b) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

V F d) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1, 0, 0, 0, 0)\}$.

V F d) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x - 2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

V F b) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V F c) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F b) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

V F c) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

V F d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

V F b) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

V F c) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

V F d) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F d) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1, 0, 0, 0, 0)\}$.

V F c) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x - 2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F d) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U + W) = 5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F b) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$, allora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$.

V F c) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

V F d) La coppia $((1, 2), (2, 1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

V F b) Se A, B, C, D sono matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)(C + D) = (AC + BD) + (AD + BC)$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $AB \neq BA$.

V F d) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V F b) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V F b) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V F b) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F c) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V F b) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

V F c) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V F b) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V F c) Per ogni coppia (A, B) di matrici reali è definita la somma $A + B$.

V F d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle|$.

V F c) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

V F d) L'angolo fra i due vettori $(1,0,1),(0,1,1)$ è di $\pi/3$ radianti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

V F b) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

V F d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V F b) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

V F d) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s-1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

V F c) $(1,1,1) \wedge (0,0,0) = (1,1,1)$.

V F d) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z) = (x,x,0)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1),\ldots,f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

V F d) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni polinomio in x a coefficienti reali è il polinomio caratteristico di almeno un endomorfismo.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono diagonalizzabili per similitudine allora anche la loro somma lo è.

V F c) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è semplice allora è semplice anche l'endomorfismo $2f$.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è sempre uguale alla molteplicità algebrica di λ.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue equazioni sono linearmente dipendenti.

V F b) Esistono matrici reali 7×9 di rango 8.

V F c) Esistono sistemi lineari di 8 equazioni in 5 incognite che ammettono un numero infinito di soluzioni.

V F d) Ogni sistema lineare omogeneo ha un numero infinito di soluzioni.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni funzione suriettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è una trasformazione lineare.

V F b) Due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

V F c) Esistono trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ il cui nucleo abbia dimensione 2.

V F d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono isomorfismi se e solo se sono suriettivi.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = s, y = s - 1, z = 2s$ sono fra loro sghembe.

V F b) $(1, 1, 1) \wedge (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

V F c) Ogni retta di $\mathbb{R}^3$ ammette una e una sola equazione cartesiana.

V F d) Il piano di equazione cartesiana $z = 0$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, z = 1$ sono fra loro paralleli.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle traslazioni del piano reale è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_7$ è un campo.

V F c) Se A e B sono due insiemi infiniti di numeri naturali esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F d) L'insieme dei numeri interi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Due basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno sempre la stessa cardinalità.

V F b) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^{2020}$ tali che $\dim(U+W)=5$. Allora U e W hanno in comune almeno un vettore non nullo.

V F c) La coppia $((1,2),(2,1))$ è una base ordinata dello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$.

V F d) Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{v}+\mathbf{w} \in U$, allora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $AB \neq BA$.

V F b) Per ogni matrice reale A di tipo 3×4 è definita la matrice A^2.

V F c) L'anello delle matrici reali 8×8 possiede divisori dello zero.

V F d) Se A, B, C, D sono matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A+B)(C+D) = (AC+BD) + (AD+BC)$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \geq |\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle|$.

V F b) La composizione di due isometrie di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre un'isometria di V.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1,0,1), (0,1,1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F d) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora f porta ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice antisimmetrica ha determinante nullo.

V F b) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$. Allora $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

V F c) Il determinante è una funzione alternante rispetto alle righe della matrice.

V F d) Ogni matrice $n \times n$ a determinante nullo ha rango strettamente inferiore a n.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno la stessa traccia.

V **F** b) Se un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ ha 0 come autovalore reale allora f non è suriettivo.

V **F** c) Tutte le matrici quadrate reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V **F** d) Esistono matrici quadrate reali prive di autovalori reali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esistono due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V **F** b) Se due spazi vettoriali reali sono isomorfi fra loro e uno dei due ha dimensione n allora anche l'altro ha dimensione n.

V **F** c) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un sistema ordinato di generatori di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$.

V **F** d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Per ogni coppia (A, B) di matrici reali è definita la somma $A + B$.

V **F** b) Esistono matrici reali 4×4 che ammettono due inverse distinte fra loro.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 7×7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

V **F** d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è associativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale euclideo finitamente generato possiede almeno una base ortonormale.

V **F** c) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0$ ammette come base $B = \{(1, 0, 0, 0, 0)\}$.

V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni trasformazione lineare $f : U \to W$ ammette una e una sola matrice associata.

V F b) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali. La funzione da V a V che porta ogni polinomio nella sua derivata terza è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x, x, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali ammettono la stessa forma ridotta per colonne allora hanno anche lo stesso rango.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $r(A) < r(C)$.

V F c) L'unica matrice reale 9×9 di rango 9 è la matrice identica.

V F d) Una matrice completamente ridotta per righe non può mai contenere righe nulle.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice ortogonale. Allora A è invertibile se e solo se $\det A = 1$.

V F b) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i1}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Le matrici A e B sono entrambe invertibili se e solo se $\det(AB) \neq 0$.

V F d) Se una matrice reale A ha un minore il cui determinante è nullo, allora A non è invertibile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(0, 0, 1) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F b) Per ogni punto passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x - 2z = 3$ sono fra loro ortogonali.

V F d) La retta di equazione parametrica $x = t, y = t, z = 1$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono gruppi non commutativi con meno di 10 elementi.

V F b) Ogni anello isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_4$ è commutativo.

V F c) Se A e B sono due sottoinsiemi infiniti del piano reale esiste sempre una corrispondenza biunivoca fra A e B.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.