Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$.

V F b) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F d) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

V F b) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V F c) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

V F d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

V F b) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F d) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

V F c) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

V F b) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i1} \cdots a_{in}$.

V F c) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

V F b) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V F c) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un autovettore di f.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F c) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

V F b) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

V F c) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

V F d) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

V F c) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'angolo fra i due vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/4$ radianti.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

V F c) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

V F d) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, x + y, x + y + z)$ non è un'isometria.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

V F b) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V F d) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V F b) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V F d) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

V F b) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

V F c) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

V F b) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

V F d) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

V F d) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V **F** c) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V **F** d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V **F** b) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

V **F** c) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

V **F** d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V **F** b) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

V **F** c) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}a_{i1}\cdots a_{in}$.

V **F** d) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

V **F** b) Se una matrice reale $n \times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

V **F** c) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

V **F** d) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F b) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

V F c) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V F d) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F c) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

V F d) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, x + y, x + y + z)$ non è un'isometria.

V F b) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/4$ radianti.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

V F b) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V F d) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

V F c) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V F c) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

V F c) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

V F b) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

V F c) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

V F d) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

V F c) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

V F d) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un autovettore di f.

V F d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

V F b) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

V F c) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

V F b) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V F c) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F d) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V **F** c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

V **F** c) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V **F** b) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

V **F** c) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** d) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

V **F** b) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

V **F** c) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

V **F** d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

V **F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

V **F** c) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V **F** d) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}a_{i1}\cdots a_{in}$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A+B) = \det A + \det B$.

V F d) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V F b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ è un autovettore di f.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

V F d) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1,1,1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F c) $(1,0,0) \wedge (0,0,1) = (0,-1,0)$.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F c) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

V F b) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

V F d) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

V F b) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

V F c) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

V F d) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$.

V F d) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F c) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

V F d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

V F b) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, x + y, x + y + z)$ non è un'isometria.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

V F d) L'angolo fra i due vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/4$ radianti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

V F c) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

V F d) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F b) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

V F c) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V F d) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V F b) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

V F c) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

V F d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \dots , f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \dots , \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

V F c) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

V F b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V F c) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

V F c) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F c) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

V F d) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

V F b) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

V F b) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V F c) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

V F d) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i1} \cdots a_{in}$.

V F b) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

V F b) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, x + y, x + y + z)$ non è un'isometria.

V F b) L'angolo fra i due vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/4$ radianti.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

V F d) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

V F b) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot, \cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F c) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V F c) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

V F d) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

V F b) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V F c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F d) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V F b) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V F c) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

V F b) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

V F c) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

V F d) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

V F b) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V F c) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

V F d) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F b) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

V F d) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un autovettore di f.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V F b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F c) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

V F d) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F c) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

V F d) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V F b) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

V F d) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V F b) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

V F d) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i1} \cdots a_{in}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

V F c) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un autovettore di f.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V F b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F d) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V F b) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \ldots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|\geq\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$.

V **F** c) L'angolo fra i due vettori $(1,1,1),(0,1,1)$ è di $\pi/4$ radianti.

V **F** d) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x,y,z) in $(x,x+y,x+y+z)$ non è un'isometria.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se una matrice reale $n\times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

V **F** c) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

V **F** d) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V **F** b) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V **F** c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U+W=\mathbb{R}^5$. Allora $\dim U\cap W=1$.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** b) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V **F** c) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

V **F** d) Ogni funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

V **F** c) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

V **F** d) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

V **F** b) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

V **F** c) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

V **F** d) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

V **F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** b) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

V **F** c) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V **F** d) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

V **F** c) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V **F** d) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

V F b) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

V F c) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

V F d) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

V F c) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}a_{i1}\cdots a_{in}$.

V F d) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

V F d) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

V F d) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, x + y, x + y + z)$ non è un'isometria.

V F b) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

V F d) L'angolo fra i due vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/4$ radianti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

V F b) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

V F d) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F c) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V F d) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F b) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

V F c) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V F d) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V **F** c) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

V **F** b) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

V **F** c) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

V **F** d) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

V **F** c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un autovettore di f.

V **F** d) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

V **F** d) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

V **F** b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** c) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V **F** d) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V **F** b) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** c) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

V **F** d) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** b) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

V **F** c) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

V **F** d) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V **F** b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

V **F** c) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V **F** d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

V F b) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

V F c) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F b) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

V F c) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

V F d) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

V F b) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V F c) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V F c) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i1} \cdots a_{in}$.

V F d) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V F b) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V **F** c) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V **F** c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

V **F** d) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V **F** c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

V **F** d) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un autovettore di f.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V **F** b) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** c) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

V **F** d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, x+y, x+y+z)$ non è un'isometria.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/4$ radianti.

V F d) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

V F c) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F b) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \ldots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V F d) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

V **F** b) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V **F** c) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** d) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

V **F** b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V **F** c) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V **F** d) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

V **F** b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

V **F** c) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V **F** d) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V **F** c) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \dots , f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \dots , \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

V **F** b) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

V **F** c) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

V **F** d) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.
V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.
V F c) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.
V F d) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.
V F b) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.
V F c) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.
V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.
V F b) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.
V F c) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.
V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.
V F b) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, x + y, x + y + z)$ non è un'isometria.
V F c) L'angolo fra i due vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/4$ radianti.
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.
V F b) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.
V F c) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.
V F d) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i1} \cdots a_{in}$.

V F b) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

V F d) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V F d) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

V F d) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V F c) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

V F d) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

V F b) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

V F c) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

V F d) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F b) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V F c) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

V F d) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V F c) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \ldots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V F d) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

V F c) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

V F b) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F c) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V F d) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un autovettore di f.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V F d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

V F b) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F d) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

V F c) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

V F d) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V F b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F c) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

V F d) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

V F b) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

V F c) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} a_{i1} \cdots a_{in}$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

V F d) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un autovettore di f.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V F b) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F d) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V F b) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

V F b) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F c) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

V F d) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

V F b) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

V F c) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V **F** b) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

V **F** c) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

V **F** d) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V **F** b) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** c) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

V **F** b) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

V **F** c) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

V **F** d) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

V **F** b) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

V **F** c) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

V F b) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

V F d) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V F b) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V F d) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

V F b) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

V F d) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

V F b) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, x + y, x + y + z)$ non è un'isometria.

V F c) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

V F d) L'angolo fra i due vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/4$ radianti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

V F b) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

V F c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F d) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, x + y, x + y + z)$ non è un'isometria.

V F b) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/4$ radianti.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

V F b) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V F d) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i1} \cdots a_{in}$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

V F c) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

V F c) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F c) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

V F d) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F c) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \ldots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V F d) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F b) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

V F c) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

V F d) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V F b) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

V F d) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

V F d) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

V F b) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

V F c) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

V F c) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un autovettore di f.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V F c) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \dots , f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \dots , \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

V F b) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V F c) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V F d) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

V F d) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

V F b) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

V F c) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^n a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

V F d) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

V F c) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}a_{i1}\cdots a_{in}$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

V F c) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

V F b) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un autovettore di f.

V F d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

V F b) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F d) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2$.

V F b) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

V F c) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

V F d) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

V **F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V **F** d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V **F** c) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

V **F** d) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

V **F** b) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

V **F** c) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V **F** d) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V F b) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

V F c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F d) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V F b) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

V F c) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V F b) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

V F c) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

V F d) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V F b) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

V F c) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

V F d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|\geq\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$.

V F c) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x,y,z) in $(x,x+y,x+y+z)$ non è un'isometria.

V F d) L'angolo fra i due vettori $(1,1,1),(0,1,1)$ è di $\pi/4$ radianti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale $n\times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

V F c) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

V F d) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A=-1$.

V F b) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

V F c) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A=0$.

V F d) Se $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{in}\cdot\det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni $x+y+z=0$ e $-x-y-z=1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x=2t, y=3t, z=4t$ e $x=4s+4, y=3s+3, z=2s+2$ sono fra loro sghembe.

V F c) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

V F d) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V F b) La funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z)=(xyz,xyz,xyz)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f:V\to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1),\dots,f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

V F d) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A+I$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono simili tra loro hanno lo stesso determinante.

V F b) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^2 è diagonalizzabile.

V F c) Gli autovalori di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a f.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha un autovalore di molteplicità geometrica uguale a n, allora tale matrice è un multiplo della matrice identica.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se le sue matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango.

V F b) Se A è una matrice reale quadrata allora tutte le potenze di A hanno lo stesso rango.

V F c) La matrice identica 9×9 ha rango 9.

V F d) Un sistema lineare ammette la soluzione nulla se e solo se è omogeneo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni trasformazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^8$ a $\mathbb{R}^8$ è un isomorfismo.

V F b) Fra due spazi vettoriali reali qualunque esiste sempre almeno un omomorfismo.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di V.

V F d) La composizione di due endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ è sempre un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni parametriche $x = 2t, y = 3t, z = 4t$ e $x = 4s + 4, y = 3s + 3, z = 2s + 2$ sono fra loro sghembe.

V F b) Il prodotto vettoriale fra due vettori non nulli non può mai essere nullo.

V F c) La relazione di parallelismo fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V F d) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $-x - y - z = 1$ sono fra loro ortogonali.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle isometrie dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Esiste un numero infinito di campi a due a due non isomorfi.

V F c) Ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V **F** b) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 3 di $\mathbb{R}^5$ tali che $U + W = \mathbb{R}^5$. Allora $\dim U \cap W = 1$.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali triangolari superiori 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 3 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ diagonali si ha sempre che $AB = BA$.

V **F** b) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$, allora $A + A + A$ è la matrice nulla.

V **F** c) L'anello dei numeri interi possiede divisori dello zero.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ si ha sempre che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

V **F** b) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, x + y, x + y + z)$ non è un'isometria.

V **F** c) L'angolo fra i due vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/4$ radianti.

V **F** d) Ogni base ortonormale è una base ortogonale.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice reale 5×5 di rango 3 ha determinante nullo.

V **F** b) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i1} \cdots a_{in}$.

V **F** c) Il determinante di una matrice quadrata A coincide sempre col determinante della trasposta di A.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$, allora $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso determinante, allora sono simili.

V F b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di un endomorfismo f allora anche $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ è un autovettore di f.

V F c) Tutte le matrici quadrate reali antisimmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) Esistono matrici quadrate reali 7×7 prive di autovalori reali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sottoinsieme dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^5$, allora esiste un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{w}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^5$.

V F b) Esiste uno e un solo spazio vettoriale di dimensione 7.

V F c) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste una e una sola n-upla ordinata di scalari $(a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$.

V F d) L'insieme delle matrici ortogonali 2×2 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici reali 11×11 sono invertibili.

V F b) Per ogni matrice quadrata A invertibile si ha che l'inversa della trasposta di A è uguale alla trasposta dell'inversa di A.

V F c) Se A è la matrice 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ con tutti i coefficienti uguali a 1, allora A^2 è la matrice nulla.

V F d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo nullo da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^5$ possiede infinite basi ortonormali distinte.

V F c) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W \cap W^\perp) = 0$.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice del cambiamento di base è invertibile.

V **F** b) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia I la matrice identica 2×2. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $A + I$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare e $(f(\mathbf{v}_1), \dots , f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di W, allora $(\mathbf{v}_1, \dots , \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente dipendenti di V.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (xyz, xyz, xyz)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici reali hanno lo stesso rango allora ammettono la stessa forma ridotta per righe.

V **F** b) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una e una sola soluzione.

V **F** c) L'unica matrice reale 8×8 di rango 8 è la matrice identica.

V **F** d) Ogni matrice reale può essere trasformata in una matrice completamente ridotta per righe applicando opportune operazioni riga.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia A una matrice ortogonale con determinante negativo. Allora $\det A = -1$.

V **F** b) Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{in} \cdot \det M_{in}$, dove M_{in} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{in}.

V **F** c) Se la prima riga di una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ è il doppio della seconda, allora $\det A = 0$.

V **F** d) Sia A una matrice reale 8×8. Se tutti i minori 3×3 di A hanno determinante nullo allora il rango di A è strettamente minore di 3.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$.

V **F** b) Per ogni retta passa uno e un solo piano parallelo a un piano dato.

V **F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x = 1$ e $z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) La retta di equazione parametrica $x = 2t, y = 2t, z = 2t$ ammette $(1, 1, 1)$ come terna di parametri direttori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V **F** b) L'anello $\mathbb{Z}_{2020}$ è un campo.

V **F** c) Due campi di cardinalità infinita sono sempre isomorfi tra di loro.

V **F** d) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali in una variabile è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.