10 febbraio 2020 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

V **F** b) Tutti gli anelli sono commutativi.

V **F** c) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V **F** d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

V **F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

V **F** c) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

V **F** d) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

V **F** b) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

V **F** c) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

V **F** d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

V **F** b) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V **F** c) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

V **F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V F c) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

V F d) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

V F b) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i, j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj}$.

V F c) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

V F d) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n \times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

V F b) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V F c) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un autovettore di g.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un versore di V.

V F c) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale è commutativo.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

V **F** b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.

V **F** c) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

V **F** d) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V **F** b) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

V **F** c) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** d) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{v}\|$.

V **F** c) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

V **F** d) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, 2y, 3z)$ non è un'isometria.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

V **F** b) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

V **F** c) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V **F** d) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V **F** b) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U+W)=4$.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V **F** b) Ogni campo è un anello.

V **F** c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V **F** d) Ogni funzione $f:\{x\in\mathbb{N} : x\leq 2020\}\to\{x\in\mathbb{N} : x\leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $f:V\to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1),\dots,f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

V **F** b) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n\times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

V **F** c) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

V **F** d) La funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x,y,z)=(0,x,y,z)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ non invertibili si ha sempre che $AB=BA$.

V **F** b) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ e $A^2=B^2$ allora $A=B$.

V **F** d) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

V **F** b) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

V **F** c) La matrice reale nulla $n\times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

V **F** d) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

10 febbraio 2020 N. di Matricola: 00111

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

V F d) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V F b) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n \times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

V F b) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

V F c) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i, j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj}$.

V F d) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

V F b) La matrice reale nulla $n\times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

V F d) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

V F b) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

V F c) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

V F d) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

V F b) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

V F c) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, 2y, 3z)$ non è un'isometria.

V F b) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{v}\|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

V F b) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V F d) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

V F c) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F d) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.
V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.
V F c) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.
V F d) Il prodotto vettoriale è commutativo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.
V F b) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.
V F c) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.
V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni funzione $f : \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\} \to \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
V F b) Ogni campo è un anello.
V F c) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.
V F d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.
V F b) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.
V F c) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.
V F d) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un versore di V.

V **F** b) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

V **F** c) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

V **F** d) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V **F** b) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V **F** c) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un autovettore di g.

V **F** d) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

V **F** b) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ non invertibili si ha sempre che $AB = BA$.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** b) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U + W) = 4$.

V **F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V **F** c) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

V **F** d) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V F c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U + W) = 4$.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ non invertibili si ha sempre che $AB = BA$.

V F c) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un versore di V.

V F b) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

V F c) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

V F c) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

V F d) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F c) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V F d) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i, j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} A_{nj}$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

V F c) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n \times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

V F d) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V F b) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un autovettore di g.

V F c) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

V F d) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

V F b) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

V F c) Il prodotto vettoriale è commutativo.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni funzione $f : \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\} \to \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F c) Ogni campo è un anello.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La matrice reale nulla $n\times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

V **F** b) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

V **F** c) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

V **F** d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.

V **F** b) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

V **F** c) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

V **F** d) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

V **F** b) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

V **F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

V **F** d) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutti gli anelli sono commutativi.

V **F** b) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V **F** c) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

V **F** d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

V **F** b) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, 2y, 3z)$ non è un'isometria.

V **F** c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{v}\|$.

V **F** d) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni $x+y+z=0$ e $z=1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

V F c) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

V F d) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

V F b) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V F d) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

V F b) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

V F c) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

V F d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

V F c) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U+W) = 4$.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

V **F** c) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ non invertibili si ha sempre che $AB = BA$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V **F** b) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

V **F** c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

V **F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V **F** b) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

V **F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V **F** d) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

V **F** b) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V **F** c) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

V **F** d) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni campo è un anello.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F c) Ogni funzione $f : \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\} \to \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i, j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} A_{nj}$.

V F b) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

V F d) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n \times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

V F b) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

V F c) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

V F d) La matrice reale nulla $n \times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, 2y, 3z)$ non è un'isometria.

V F b) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{v}\|$.

V F d) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

V F b) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un versore di V.

V F c) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

V F b) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

V F c) Il prodotto vettoriale è commutativo.

V F d) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

V **F** b) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

V **F** c) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

V **F** d) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

V **F** b) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

V **F** c) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

V **F** b) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

V **F** c) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

V **F** d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V **F** c) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

V **F** d) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V **F** b) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V **F** c) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

V **F** d) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un autovettore di g.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

V **F** b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

V **F** c) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

V **F** d) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un versore di V.

V **F** b) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V **F** c) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

V **F** d) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

V **F** b) Il prodotto vettoriale è commutativo.

V **F** c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

V **F** b) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

V **F** c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

V **F** d) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V F b) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n \times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

V F b) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

V F c) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

V F d) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i, j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V F b) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

V F c) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F d) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un autovettore di g.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F d) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{v}\|$.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1,0,1),(0,1,1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F d) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x,y,z) in $(x,2y,3z)$ non è un'isometria.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice reale nulla $n\times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F b) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

V F d) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V F c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U+W)=4$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F b) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F c) Ogni campo è un anello.

V F d) Ogni funzione $f : \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\} \to \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ non invertibili si ha sempre che $AB = BA$.

V F c) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

V F d) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.

V F b) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

V F c) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

V F d) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

V F c) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

V F b) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V F d) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

V F c) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V F d) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

V F b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

V F c) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V F d) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n\times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

V F c) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n\times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i,j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj}$.

V F d) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

V F b) La matrice reale nulla $n\times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F c) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V F d) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, 2y, 3z)$ non è un'isometria.

V F b) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{v}\|$.

V F d) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

V F b) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F c) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

V F d) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F c) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F d) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

V F b) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

V F c) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

V F d) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U+W)=4$.

V F b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V F d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB)=0$ allora B non è invertibile.

V F b) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

V F c) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

V F d) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V F b) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

V F c) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ è un autovettore di g.

V F d) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ e $A^2=B^2$ allora $A=B$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ non invertibili si ha sempre che $AB=BA$.

V F d) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni campo è un anello.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F c) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F d) Ogni funzione $f:\{x\in\mathbb{N} : x\leq 2020\}\to\{x\in\mathbb{N} : x\leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un versore di V.

V F b) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

V F d) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

V F b) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

V F c) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

V F b) Il prodotto vettoriale è commutativo.

V F c) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ non invertibili si ha sempre che $AB = BA$.

V F b) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

V F c) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

V F d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

V F b) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

V F c) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

V F b) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

V F b) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n \times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

V F c) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i, j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj}$.

V F d) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V F b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U + W) = 4$.

V F d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un versore di V.

V F c) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

V F c) Il prodotto vettoriale è commutativo.

V F d) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F b) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V F c) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

V F d) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un autovettore di g.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Ogni funzione $f : \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\} \to \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) Ogni campo è un anello.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, 2y, 3z)$ non è un'isometria.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{v}\|$.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F d) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

V F b) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

V F d) La matrice reale nulla $n\times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F d) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

V **F** b) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V **F** c) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

V **F** d) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

V **F** b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

V **F** c) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

V **F** d) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

V **F** b) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

V **F** c) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V **F** d) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** b) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

V **F** c) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

V **F** b) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

V **F** c) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.

V **F** d) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V F b) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

V F c) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

V F d) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice reale nulla $n\times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F b) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

V F d) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V F b) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

V F c) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

V F b) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, 2y, 3z)$ non è un'isometria.

V F c) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{v}\|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

V F c) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V F d) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i, j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} A_{nj}$.

V F b) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

V F c) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n \times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

V F d) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni funzione $f : \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\} \to \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F b) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F d) Ogni campo è un anello.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V F c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V F d) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U + W) = 4$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

V F b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ non invertibili si ha sempre che $AB = BA$.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

V F d) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F c) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

V F d) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

V F b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.

V F c) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

V F d) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

V F b) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

V F c) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

V F d) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

V F d) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

V F c) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \ldots , \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \ldots , f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

V F b) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V F d) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un autovettore di g.

V F b) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V F d) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

V F d) Il prodotto vettoriale è commutativo.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots , \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

V F b) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot, \cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un versore di V.

V F d) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un versore di V.

V F b) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

V F c) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Il prodotto vettoriale è commutativo.

V F d) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

V F b) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

V F c) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

V F d) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

V F b) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

V F c) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i, j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} A_{nj}$.

V F d) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n \times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V F b) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

V F d) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un autovettore di g.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F d) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

V F b) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

V F d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

V F b) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

V F c) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V F d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F b) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

V F c) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V F d) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V F b) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

V F c) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

V F d) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Ogni funzione $f : \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\} \to \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F d) Ogni campo è un anello.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

V F b) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

V F c) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

V F d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

V F b) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

V F c) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F d) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ non invertibili si ha sempre che $AB = BA$.

V F b) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

V F c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

V F d) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V **F** d) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U + W) = 4$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

V **F** b) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

V **F** c) La matrice reale nulla $n \times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

V **F** d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

V **F** b) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \dots , \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots , f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

V **F** c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V **F** d) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\| -2\mathbf{v}\| = 2 \|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, 2y, 3z)$ non è un'isometria.

V **F** c) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

V **F** d) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V **F** b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

V **F** c) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

V **F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V **F** b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V **F** c) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

V **F** d) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, 2y, 3z)$ non è un'isometria.

V **F** b) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

V **F** c) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V **F** d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{v}\|$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

V **F** b) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V **F** c) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V **F** d) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i, j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} A_{nj}$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

V F c) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

V F d) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n \times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

V F b) La matrice reale nulla $n \times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

V F d) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F c) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

V F d) Tutti gli anelli sono commutativi.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

V F d) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

V F b) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

V F c) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

V F d) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V **F** b) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U + W) = 4$.

V **F** d) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V **F** b) Ogni funzione $f : \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\} \to \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V **F** c) Ogni campo è un anello.

V **F** d) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

V **F** b) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

V **F** c) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ non invertibili si ha sempre che $AB = BA$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

V **F** c) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V **F** d) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un autovettore di g.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

V F c) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V F c) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

V F d) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un versore di V.

V F b) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

V F d) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

V F b) Il prodotto vettoriale è commutativo.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

V F b) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

V F c) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.

V F d) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F c) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

V F d) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i, j) in A. Allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} A_{nj}$.

V F b) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

V F c) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

V F d) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n \times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1}) = (\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

V F b) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.

V F c) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è un autovettore di g.

V F d) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni campo è un anello.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

V F c) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F d) Ogni funzione $f : \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\} \to \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ è un versore di V.

V **F** b) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W) = \dim(W^\perp)$.

V **F** c) Sia $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.

V **F** d) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

V **F** b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V **F** c) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

V **F** d) Il prodotto vettoriale è commutativo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U + W) = 4$.

V **F** b) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

V **F** c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

V **F** b) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ e $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

V **F** c) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ non invertibili si ha sempre che $AB = BA$.

V **F** d) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V **F** b) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

V **F** c) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

V **F** d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.

V **F** b) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.

V **F** c) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.

V **F** d) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutti gli anelli sono commutativi.

V **F** b) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

V **F** c) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V **F** d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V **F** b) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

V **F** c) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

V **F** d) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

V **F** b) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.

V **F** c) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.

V **F** d) Siano A e B due matrici reali $n \times n$. Allora $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se e solo se $AB = BA$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\| = 2\,\|\mathbf{v}\|$.

V F c) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x, y, z) in $(x, 2y, 3z)$ non è un'isometria.

V F d) L'angolo fra i due vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ è di $\pi/3$ radianti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice reale nulla $n\times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

V F b) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

V F c) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

V F d) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

V F b) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

V F c) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

V F d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

V F b) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

V F c) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

V F d) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

V F d) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Due matrici quadrate sono simili se e solo se hanno lo stesso rango.

V F b) Se una matrice quadrata reale A è diagonalizzabile allora anche A^3 è diagonalizzabile.

V F c) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che ammettono infiniti autovalori reali distinti.

V F d) La matrice reale nulla $n\times n$ ammette 0 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica n.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esistono sistemi lineari omogenei di 5 equazioni in 5 incognite il cui insieme di soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

V F b) Esistono matrici reali 2020×2020 che hanno rango 1010.

V F c) Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi di $\mathbb{R}^n$ e sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Allora le matrici $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)$ e $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2}(f)$ hanno lo stesso rango.

V F d) Esistono sistemi lineari privi di soluzioni.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni trasformazione lineare invertibile è un isomorfismo.

V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali isomorfi a $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ sono anche isomorfi a $\mathbb{R}^{20}$.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di W.

V F d) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che mandi il vettore nullo nel vettore nullo è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Esistono infinite rette sghembe a una retta data.

V F b) Esistono vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ per i quali $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

V F c) La relazione di ortogonalità fra rette di $\mathbb{R}^3$ è una relazione di equivalenza.

V F d) I piani di rispettive equazioni $x + y + z = 0$ e $z = 1$ sono fra loro ortogonali.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale intorno a un punto fissato è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di composizione.

V F b) Ogni campo è un anello.

V F c) Ogni funzione $f : \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\} \to \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2020\}$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'usuale operazione di prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato contiene almeno una base.

V **F** b) Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(U+W)=4$.

V **F** c) L'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) Ogni spazio vettoriale reale di dimensione 1 contiene un numero infinito di sottospazi vettoriali.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ non invertibili si ha sempre che $AB=BA$.

V **F** b) Ogni matrice reale quadrata a traccia nulla è non invertibile.

V **F** c) Il campo dei numeri reali possiede divisori dello zero.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali $n\times n$ e $A^2=B^2$ allora $A=B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale V finitamente generato. Allora per ogni $\mathbf{v}\in V$ si ha che $\|-2\mathbf{v}\|=2\,\|\mathbf{v}\|$.

V **F** b) La funzione dallo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ in sé che porta ogni punto (x,y,z) in $(x,2y,3z)$ non è un'isometria.

V **F** c) L'angolo fra i due vettori $(1,0,1),(0,1,1)$ è di $\pi/3$ radianti.

V **F** d) Ogni base ortogonale è una base ortonormale.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice reale 7×7 che abbia determinante nullo ha rango strettamente inferiore a 7.

V **F** b) Sia $A=(a_{ij})$ una matrice $n\times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico del generico elemento di posto (i,j) in A. Allora $\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj}$.

V **F** c) Il determinante di una matrice quadrata A invertibile coincide sempre col determinante dell'inversa di A.

V **F** d) Se A e B sono due matrici reali invertibili $n\times n$, allora $\det(A^{-1}B^{-1})=(\det A)^{-1}(\det B)^{-1}$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali non hanno lo stesso determinante, allora non sono simili.
V F b) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori di un endomorfismo g allora anche $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ è un autovettore di g.
V F c) Tutte le matrici reali simmetriche sono diagonalizzabili per similitudine.
V F d) Esistono matrici quadrate reali 4×4 prive di autovalori reali.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Nessuno spazio vettoriale di dimensione infinita può ammettere una base finita.
V F b) Tutti gli spazi vettoriali reali di dimensione 7 sono isomorfi tra loro.
V F c) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^9$ contiene al più 9 elementi.
V F d) L'insieme delle matrici diagonali 10×10 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice quadrata A tale che A^3 sia la matrice nulla è essa stessa la matrice nulla.
V F b) L'unica matrice reale che sia allo stesso tempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.
V F c) Ogni matrice non nulla antisimmetrica 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ è invertibile.
V F d) Siano A e B due matrici reali $n\times n$. Allora $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ se e solo se $AB=BA$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo identico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
V F b) Sia $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo. Allora, se $\mathbf{v}=x_1\mathbf{v}_1+\ldots+x_n\mathbf{v}_n$, si ha che $x_i=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_i$ per ogni i fra 1 e n.
V F c) Sia $W^\perp$ l'ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^n$. Allora $\dim(W)=\dim(W^\perp)$.
V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale finitamente generato V e siano $\mathbf{u},\mathbf{v}$ due versori di V fra loro ortogonali. Allora $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ è un versore di V.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice del cambiamento di base è simmetrica.

V F b) Sia V lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$. La funzione da V a V che porta ogni matrice A in $\frac{1}{2}A$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : V \to W$ è una trasformazione lineare iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di V, allora $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ è una n-upla di vettori linearmente indipendenti di W.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $f(x, y, z) = (0, x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ ridotta per righe non può contenere più di n pivot.

V F b) Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è costituito da equazioni fra loro linearmente dipendenti allora non può ammettere una e una sola soluzione.

V F c) Il rango è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ al campo dei numeri reali.

V F d) Esistono infinite matrici reali 8×8 di rango 4.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inversa di una matrice ortogonale è sempre una matrice ortogonale.

V F b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $\det(AB) = 0$ allora B non è invertibile.

V F c) Ogni matrice diagonale reale 7×7 è invertibile.

V F d) Sia A una matrice reale 9×9 di rango 3. Allora tutti i minori 5×5 di A hanno determinante nullo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il prodotto vettoriale è commutativo.

V F b) Per ogni retta parallela a un dato piano π passa uno e un solo piano parallelo a π.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Se due rette di $\mathbb{R}^3$ non sono parallele allora hanno almeno un punto in comune.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è un gruppo rispetto all'usuale composizione di funzioni.

V F b) Tutti gli anelli sono commutativi.

V F c) La struttura algebrica $(\mathbb{R}, \star)$ definita ponendo $x \star y = x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è un gruppo.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.