Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   B) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   C) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.
   D) A, B e C hanno traccia non nulla.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 0, 0), (0, 0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.
B) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
C) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
D) se il sistema **S** non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
A) T ammette al più n autovalori distinti.
B) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
B) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
C) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.
D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -4)$, $(3, -6)$ è $(1, -5)$.
B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, -4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.
C) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(-2, 0, 2)$ è 3.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.
   B) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.
   C) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\{(-1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $I\!R^3$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.
   D) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t - 3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   B) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).
   C) gli spazi vettoriali reali $I\!R^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(I\!R)$ sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se A ha traccia nulla allora non è regolare.
   C) se A è invertibile e $B = {}^t(A^{-1})$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.
   B) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   B) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   D) può accadere che A e C abbiano rango diverso.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^7[t]$.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v \rangle \geq \langle v, w \rangle$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) A, B e C hanno traccia non nulla.
   B) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   C) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   D) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se il sistema **S** non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
   C) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
   D) T ammette al più n autovalori distinti.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v \rangle \geq \langle v, w \rangle$.
   D) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme $\{(1,0,0,0,0),(0,2,0,0,0),(0,0,3,0,0),(0,0,0,4,0),(0,0,0,0,5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t - 3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.
   C) $\{(-1, 0, 0),(0, 0, -1),(0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, -4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(-2, 0, 2)$ è 3.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -4)$, $(3, -6)$ è $(1, -5)$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A e C abbiano rango diverso.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   C) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) se $(I\!\!K, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.
   D) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno la stessa traccia.
   B) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   C) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.
   D) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
   B) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.
   C) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $I\!R^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $I\!R^7[t]$.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.
   B) se A ha traccia nulla allora non è regolare.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se A è invertibile e $B = {}^t\!\left(A^{-1}\right)$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.
   B) gli spazi vettoriali reali $I\!R^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(I\!R)$ sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).
   D) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se A ha traccia nulla allora non è regolare.
   D) se A è invertibile e $B = {}^t\big(A^{-1}\big)$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^7[t]$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.
   C) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.
   C) se il sistema $\mathbf{S}$ non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.
   D) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
   B) T ammette al più n autovalori distinti.
   C) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.
   D) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
   B) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, -4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(-2, 0, 2)$ è 3.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -4)$, $(3, -6)$ è $(1, -5)$.
   D) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.
   C) se $(I\!K, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$.
   C) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   D) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v \rangle \geq \langle v, w \rangle$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.
   B) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.
   C) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   B) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) A, B e C hanno traccia non nulla.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t - 3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.
   D) $\{(-1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $I\!R^3$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   C) gli spazi vettoriali reali $I\!R^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(I\!R)$ sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 0, 0), (0, 0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   D) può accadere che A e C abbiano rango diverso.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A ha traccia nulla allora non è regolare.
   B) se A è invertibile e $B = {}^t(A^{-1})$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.
   D) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^7[t]$.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.
   D) se il sistema $\mathbf{S}$ non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.
   B) $\{(-1,0,0),(0,0,-1),(0,1,0)\}$ è una base ortonormale di $I\!R^3$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3,-3,3)$ e il piano di equazione $x+y-z=-3$ è uguale a 3.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1,3,2)$ rispetto al punto $(2,1,3)$ è il punto $(3,4,5)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(I\!K,V,+,\cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V,+)$ è un gruppo commutativo.
   B) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) T ammette al più n autovalori distinti.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.

8) Sia $\langle \cdot,\cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u,u \rangle = 0$.
   B) per ogni $u,v,w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u,v \rangle \geq \langle v,w \rangle$.
   C) se $v_1,\dots,v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1,\dots,v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   D) per ogni $u,v \in V$ risulta $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x=2t, y=-t-3, z=t$ e $x+y-z=4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   C) può accadere che A e C abbiano rango diverso.
   D) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, -4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -4)$, $(3, -6)$ è $(1, -5)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(-2, 0, 2)$ è 3.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.
   D) l'insieme $\{(1,0,0,0,0),(0,2,0,0,0),(0,0,3,0,0),(0,0,0,4,0),(0,0,0,0,5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   B) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   C) A, B e C hanno traccia non nulla.
   D) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.
   B) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   C) A e B hanno la stessa traccia.
   D) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   B) gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sono fra loro isomorfi.
   C) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.
   B) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.
   C) l'insieme $\{(1,0,0,0,0),(0,2,0,0,0),(0,0,3,0,0),(0,0,0,4,0),(0,0,0,0,5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2,-4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1,-4)$, $(3,-6)$ è $(1,-5)$.
   C) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2,0,0)$, $(0,-2,4)$, $(-2,0,2)$ è 3.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x,y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.
   D) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se il sistema $\mathbf{S}$ non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) T ammette al più n autovalori distinti.
   D) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.
   D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   B) A, B e C hanno traccia non nulla.
   C) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t-3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v\rangle \geq \langle v, w\rangle$.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u\rangle = 0$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A è invertibile e $B = {}^t(A^{-1})$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se A ha traccia nulla allora non è regolare.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.
   C) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^7[t]$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.
   B) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.
   C) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   D) può accadere che A e C abbiano rango diverso.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   C) gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.
   C) $\{(-1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
   D) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.
   B) T ammette al più n autovalori distinti.
   C) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
   D) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   C) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   D) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v \rangle \geq \langle v, w \rangle$.

4) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se il sistema **S** non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.
   C) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t - 3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.
   D) $\{(-1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $I\!R^3$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $I\!N$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) A, B e C hanno traccia non nulla.
   B) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.
   C) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.
   B) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 0, 0), (0, 0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A ha traccia nulla allora non è regolare.
   B) se A è invertibile e $B = {}^t(A^{-1})$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.
   B) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.
   C) A e B hanno la stessa traccia.
   D) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) se $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.
   D) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^7[t]$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   C) può accadere che A e C abbiano rango diverso.
   D) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   C) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.
   D) gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sono fra loro isomorfi.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, -4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -4)$, $(3, -6)$ è $(1, -5)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(-2, 0, 2)$ è 3.
   D) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^7[t]$.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.
   B) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
   B) se il sistema $\mathbf{S}$ non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   B) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.
   C) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
   D) T ammette al più n autovalori distinti.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.
   C) se A ha traccia nulla allora non è regolare.
   D) se A è invertibile e $B = {}^t\big(A^{-1}\big)$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, -4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -4)$, $(3, -6)$ è $(1, -5)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(-2, 0, 2)$ è 3.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.
   B) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t - 3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v \rangle \geq \langle v, w \rangle$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.
   B) A, B e C hanno traccia non nulla.
   C) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $I\!N$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.
   B) gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,0,0,0,0), (0,2,0,0,0), (0,0,3,0,0), (0,0,0,4,0), (0,0,0,0,5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.
   C) $\{(-1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A e C abbiano rango diverso.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   C) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno la stessa traccia.
   B) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   C) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.
   D) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.
   C) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v \rangle \geq \langle v, w \rangle$.
   D) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
   C) se il sistema $\mathbf{S}$ non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t - 3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.
   C) $\{(-1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $I\!R^3$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.
   D) T ammette al più n autovalori distinti.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.
   C) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) se $(I\!K, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.
   B) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se A è invertibile e $B = {}^t\!\left(A^{-1}\right)$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se A ha traccia nulla allora non è regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $I\!R^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $I\!R^7[t]$.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno la stessa traccia.
   B) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.
   C) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   D) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(1,0,0,0,0),(0,2,0,0,0),(0,0,3,0,0),(0,0,0,4,0),(0,0,0,0,5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) A, B e C hanno traccia non nulla.
   B) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A e C abbiano rango diverso.
   B) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).
   C) gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sono fra loro isomorfi.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.
   B) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.
   C) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(-2, 0, 2)$ è 3.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, -4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -4)$, $(3, -6)$ è $(1, -5)$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, -4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -4)$, $(3, -6)$ è $(1, -5)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(-2, 0, 2)$ è 3.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.
   C) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 0, 0), (0, 0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T ammette al più n autovalori distinti.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
   B) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $I\!N$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   B) A, B e C hanno traccia non nulla.
   C) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^2 \to I\!R$ definita come $F(x, y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A \in M_n(I\!R)$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $M_2(I\!R)$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se il sistema $\mathbf{S}$ non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) gli spazi vettoriali reali $I\!R^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(I\!R)$ sono fra loro isomorfi.
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   C) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.
   D) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) se $(I\!K, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   B) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.
   C) A e B hanno la stessa traccia.
   D) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.
   D) $\{(-1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $I\!R^3$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $I\!R^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $I\!R^7[t]$.
   C) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.
   C) se A è invertibile e $B = {}^t\left(A^{-1}\right)$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se A ha traccia nulla allora non è regolare.

7) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots , v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \dots , v_n\}$ è una base ortogonale di V.

   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u\rangle = 0$.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
   D) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v\rangle \geq \langle v, w\rangle$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   C) può accadere che A e C abbiano rango diverso.
   D) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t - 3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.
   C) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
   D) se il sistema $\mathbf{S}$ non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t - 3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.
   C) $\{(-1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
   B) T ammette al più n autovalori distinti.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v \rangle \geq \langle v, w \rangle$.
   D) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) A, B e C hanno traccia non nulla.
   B) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.
   B) l'insieme $\{(1,0,0,0,0), (0,2,0,0,0), (0,0,3,0,0), (0,0,0,4,0), (0,0,0,0,5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A è invertibile e $B = {}^t(A^{-1})$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.
   C) se A ha traccia nulla allora non è regolare.
   D) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) se $(I\!\!K, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   B) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $I\!\!R^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $I\!\!R^7[t]$.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!\!R^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!\!R$ in $I\!\!R$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.
   D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!\!R$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A e C abbiano rango diverso.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   C) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.
   B) gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, -4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -4)$, $(3, -6)$ è $(1, -5)$.
   C) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(-2, 0, 2)$ è 3.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno la stessa traccia.
   B) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   C) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.
   D) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.
   C) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
   D) se il sistema $\mathbf{S}$ non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
   B) T ammette al più n autovalori distinti.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.
   B) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.
   C) se $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda|\|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2,-4)$ e la retta di equazione $-x+2y=-4$ è 1.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2,0,0)$, $(0,-2,4)$, $(-2,0,2)$ è 3.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1,-4)$, $(3,-6)$ è $(1,-5)$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A ha traccia nulla allora non è regolare.
   B) se A è invertibile e $B = {}^t\!\left(A^{-1}\right)$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^7[t]$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x,y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   B) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   C) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.
   D) A, B e C hanno traccia non nulla.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sono fra loro isomorfi.
   B) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(1,0,0,0,0),(0,2,0,0,0),(0,0,3,0,0),(0,0,0,4,0),(0,0,0,0,5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t - 3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   B) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   C) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$.
   D) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v \rangle \geq \langle v, w \rangle$.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   B) A e B hanno la stessa traccia.
   C) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.
   D) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.
   C) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.
   D) $\{(-1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   B) può accadere che A e C abbiano rango diverso.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   D) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma non nulla, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u\rangle = 0$.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\|u\| \geq \|v\| \geq \|w\|$ allora $\langle u, v\rangle \geq \langle v, w\rangle$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\rho(A) = \rho({}^tA)$.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale A nella matrice $-A$ ha dimensione 0.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = x + y^2$ è una trasformazione lineare.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ allora $A = B$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\rho(C) = \rho(A)$ oppure $\rho(C) = \rho(A) + 1$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m \neq n$.
   D) se il sistema $\mathbf{S}$ non ammette infinite soluzioni allora $m \geq n$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale la distanza fra il punto $(-3, -3, 3)$ e il piano di equazione $x + y - z = -3$ è uguale a 3.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge 3u$ è il vettore nullo.
   C) $\{(-1, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 3, 2)$ rispetto al punto $(2, 1, 3)$ è il punto $(3, 4, 5)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che sono isomorfi ma non hanno lo stesso numero di elementi.
   B) se $(I\!\!K, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(V, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B \cdot C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se A ha traccia nulla allora non è regolare.
   C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A \cdot B)^5 = A^5 \cdot B^5$.
   D) se A è invertibile e $B = {}^t\big(A^{-1}\big)$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!\!R$ in $I\!\!R$ derivabili è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!\!R^3 : xyz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) se un insieme di 8 polinomi è un sistema di generatori per $I\!\!R^7[t]$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $I\!\!R^7[t]$.
   D) l'insieme di tutte le matrici 3×3 con esattamente 8 coefficienti nulli è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = 2t, y = -t - 3, z = t$ e $x + y - z = 4$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   B) se T^{100} è diagonalizzabile allora anche T è diagonalizzabile.
   C) T ammette al più n autovalori distinti.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è strettamente inferiore ad n.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   B) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u - \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.
   C) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $2n$.
   D) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u - v - w, u - v - w \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ non può essere la matrice nulla.
   B) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia non regolare.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) A, B e C hanno traccia non nulla.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 0, 0), (0, 0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 5)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con la diagonale principale nulla è un sottospazio vettoriale di $M_4(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 5 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y + z = 2$ e $x + 2y + z = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione non nulla.
   B) se tutte le righe di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente vuoto.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   D) può accadere che A e C abbiano rango diverso.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^8[t]$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sono fra loro isomorfi.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + I$ è una trasformazione lineare (I rappresenta qui la matrice identica $n \times n$).
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   D) se una matrice reale 2×2 ha determinante uguale a 1 allora è necessariamente la matrice identica.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T e $-T$ ammettono gli stessi autovettori.
   B) T è iniettivo se e solo se l'immagine di T coincide con V.
   C) se T non è un automorfismo allora entrambe le matrici A e B sono non invertibili.
   D) A e B hanno la stessa traccia.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -4)$, $(3, -6)$ è $(1, -5)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(-2, 0, 2)$ è 3.
   C) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(-2, -4)$ e la retta di equazione $-x + 2y = -4$ è 1.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.