Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   D) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   B) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   C) A^n non può essere la matrice nulla.
   D) A, B e C sono invertibili.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(1,0,0,0),(2,0,0,0),(3,0,0,0),(4,0,0,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.
   C) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   B) **S** ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   C) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T non può ammettere più di n autovettori distinti.
   B) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   B) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.
   B) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.
   C) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,1,1)$,$(1,1,0)$,$(1,0,0)$,$(0,0,0)$ è $1/6$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(1,3,2)$ è il punto $(-1,4,3)$.
   D) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
   B) la $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   C) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.
   D) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.
   C) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.
   B) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.
   C) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.
   B) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.
   B) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   C) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   D) A^n non può essere la matrice nulla.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.
   B) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   D) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.
   D) T non può ammettere più di n autovettori distinti.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   C) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.
   D) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme $\{(1,0,0,0), (2,0,0,0), (3,0,0,0), (4,0,0,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):

A) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.

B) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.

C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.

D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora

A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.

D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.

B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(-1, 4, 3)$.

C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.

D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

B) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

C) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.

D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.
   C) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.
   D) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.
   C) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.
   D) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.
   C) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.
   B) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.
   C) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.
   B) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.
   C) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.
   B) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.
   D) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $M_2(I\!R)$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.
   B) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.
   C) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.
   D) $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   B) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.
   D) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.
   B) T non può ammettere più di n autovettori distinti.
   C) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.
   D) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   D) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.
   C) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.
   D) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.
   C) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
   D) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.
   B) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.
   C) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   B) A^n non può essere la matrice nulla.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) A, B e C sono invertibili.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   C) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(-1, 4, 3)$.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 0, 0)$ è 1/6.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
   C) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.
   D) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), (3, 0, 0, 0), (4, 0, 0, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.
   B) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.
   D) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   C) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $M_2(I\!R)$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.
   B) $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.
   C) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   B) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.
   C) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.

B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,1,1)$,$(1,1,0)$,$(1,0,0)$,$(0,0,0)$ è $1/6$.

C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.

D) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(1,3,2)$ è il punto $(-1,4,3)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.

B) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

D) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora

A) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.

B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

C) T non può ammettere più di n autovettori distinti.

D) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.

B) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.

C) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora

A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.

C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.
   D) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.
   C) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in I\!R$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   D) l'insieme $\{(1,0,0,0),(2,0,0,0),(3,0,0,0),(4,0,0,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   B) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   C) A, B e C sono invertibili.
   D) A^n non può essere la matrice nulla.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.
   B) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
   B) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.
   C) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.
   D) la $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.
   B) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(1,0,0,0),(2,0,0,0),(3,0,0,0),(4,0,0,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.
   B) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.
   D) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.
   B) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.
   C) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) T non può ammettere più di n autovettori distinti.
   D) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $I\!R$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.
   B) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   D) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   B) A, B e C sono invertibili.
   C) A^n non può essere la matrice nulla.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   B) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
   C) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.
   D) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.
   C) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.
   B) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.
   C) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
   C) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.
   D) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(-1, 4, 3)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.
   D) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.
   D) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.
   B) T non può ammettere più di n autovettori distinti.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.
   D) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   C) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
   D) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.
   B) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   D) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.
   B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(-1, 4, 3)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 0, 0)$ è 1/6.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   C) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.
   D) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) A^n non può essere la matrice nulla.
   C) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), (3, 0, 0, 0), (4, 0, 0, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.
   B) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.
   B) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   C) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.
   B) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.
   C) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.
   D) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
   C) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.
   D) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.
   B) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   D) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.
   D) T non può ammettere più di n autovettori distinti.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che

A) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

B) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.

C) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.

D) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora

A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.

C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.

D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.

B) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.

C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.

D) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.

B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

C) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.

D) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.
   B) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
   C) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) A^n non può essere la matrice nulla.
   B) A, B e C sono invertibili.
   C) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   B) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.
   D) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.
   B) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.
   C) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,0,0,0),(2,0,0,0),(3,0,0,0),(4,0,0,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in I\!R$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,1,1)$,$(1,1,0)$,$(1,0,0)$,$(0,0,0)$ è $1/6$.
   D) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(1,3,2)$ è il punto $(-1,4,3)$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.
   C) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.
   D) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.
   B) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.
   C) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.
   C) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.
   D) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   B) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.
   D) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(-1, 4, 3)$.

B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.

C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.

D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora

A) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.

B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

C) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.

D) T non può ammettere più di n autovettori distinti.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

B) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.

C) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

D) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che

A) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.

B) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

C) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.

D) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.

B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

C) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $I\!R$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.
   C) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.
   C) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.
   D) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in I\!R$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(1,0,0,0),(2,0,0,0),(3,0,0,0),(4,0,0,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) A^n non può essere la matrice nulla.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.
   B) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.
   B) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   C) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.
   C) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   D) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), (3, 0, 0, 0), (4, 0, 0, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T non può ammettere più di n autovettori distinti.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.
   C) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $I\!R$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.
   B) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   D) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   B) A, B e C sono invertibili.
   C) A^n non può essere la matrice nulla.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.
   B) $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $M_2(I\!R)$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   B) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
   C) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.
   D) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.
   B) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.
   C) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(-1, 4, 3)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.
   C) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   D) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.
   C) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.
   D) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.
   C) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   B) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.
   B) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(-1, 4, 3)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.
   B) T non può ammettere più di n autovettori distinti.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   C) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.
   D) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   C) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme $I\!R$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) A^n non può essere la matrice nulla.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) la matrice $A + B + C$ è regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(1,0,0,0),(2,0,0,0),(3,0,0,0),(4,0,0,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in I\!R$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.
   C) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.
   D) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.
   D) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.
   D) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.
   B) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.
   C) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.
   C) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.
   D) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   B) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.
   B) T non può ammettere più di n autovettori distinti.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.
   B) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.
   C) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.
   B) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1,2)$ e la retta di equazione $x+3y=1$ è 2.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2+2xy+y^2-1=0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(2,0,1)$, $(1,1,1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1,-1)$, $(3,5)$ è $(1,2)$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.
   B) se $B=-A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A+B+C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A=B$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x,y,z)=(x+y,x-y)$ è una trasformazione lineare.
   C) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   B) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   C) A^n non può essere la matrice nulla.
   D) A, B e C sono invertibili.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $I\!R$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.
   B) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.
   D) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.
   B) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.
   C) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
   D) la $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in I\!R$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(1,0,0,0), (2,0,0,0), (3,0,0,0), (4,0,0,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.

6) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   B) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
   C) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u\rangle = \langle u, -u\rangle$.
   D) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v\rangle = 0$.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.
   B) A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.
   D) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(-1, 4, 3)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   C) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.
   D) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortonormale di V allora $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = \langle u, -u \rangle$.
   C) se $u, v \in V$ e v è il vettore nullo allora $\langle u, v \rangle = 0$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se il rango di A è non nullo.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella matrice nulla ha dimensione 4.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y, z) = (x + y, x - y)$ è una trasformazione lineare.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ ortogonale allora ha determinante uguale a 1 o a -1.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 8.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\det A = \det C$.
   C) se $m < n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ contiene esattamente una n-upla allora $\rho(A) = n$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0$ è una parabola.
   B) se u, v sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge v$ è un multiplo di u.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 1, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/6$.
   D) nello spazio euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(-1, 4, 3)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) in ogni gruppo c'è uno ed un solo elemento neutro.
   B) se $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale allora V è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $+$.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante uguale a -1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se tutti gli elementi della diagonale principale di A sono uguali fra loro allora A non è regolare.
   C) se $A \cdot {}^tA = B \cdot {}^tB$ allora $A = B$.
   D) se $B = -A$ ed n è pari allora A e B hanno lo stesso determinante.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono strettamente crescenti è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V di dimensione n è una base di V.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 con la prima riga nulla è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = s, y = t, z = 0$ e $z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se T è diagonalizzabile allora anche $5T$ è diagonalizzabile.
   C) T non può ammettere più di n autovettori distinti.
   D) se A è una matrice reale triangolare allora T è diagonalizzabile.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ con v non nullo risulta $\langle v, v \rangle > 0$.
   B) se $u, v \in V$ allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) ogni sottospazio vettoriale di V è isomorfo al suo complemento ortogonale.
   D) se $v \in V$ allora $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante strettamente positivo. Allora
   A) A^n non può essere la matrice nulla.
   B) la matrice $A + B + C$ è regolare.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ è una matrice regolare.
   D) A, B e C sono invertibili.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,0,0,0),(2,0,0,0),(3,0,0,0),(4,0,0,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 con tutti gli elementi positivi è un sottospazio vettoriale di $M_5(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x$ con $a, b, c \in I\!R$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $y - z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni allora $m < n$.
   D) il rango di C è sempre strettamente superiore al rango di A.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):

A) lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti reali ha dimensione infinita.

B) la $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 3A^2 - A$ è una trasformazione lineare.

C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

D) se una matrice reale 4×4 ha determinante nullo allora ha almeno un elemento nullo.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora

A) il polinomio caratteristico di A ed il polinomio caratteristico di B non possono avere radici in comune.

B) se T ammette n autovalori strettamente positivi allora T è invertibile.

C) se A è simmetrica allora V ammette una base spettrale relativa a T.

D) A e B hanno lo stesso determinante.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(-1, -1)$, $(3, 5)$ è $(1, 2)$.

B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(1, 2)$ e la retta di equazione $x + 3y = 1$ è 2.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra funzioni.

B) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo rispetto alla usuale operazione di divisione.

C) l'insieme delle matrici reali 7×7 invertibili è un gruppo non commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

D) l'insieme dei numeri interi pari è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.